СОВРЕМЕННАЯ НАУЧНАЯ МЫСЛЬ

УДК 519.813

Губанова Ирина Анатольевна,
старший преподаватель кафедры высшей математики,
ФГБОУ ВО «ВГПУ»,
г. Воронеж, РФ
Сакалова Кристина Андреевна,
студентка физико-математического факультета ,
ФГБОУ ВО «ВГПУ»,
г. Воронеж, РФ
Сергеева Ольга Викторовна,
студентка физико-математического факультета ,
ФГБОУ ВО «ВГПУ»,
г. Воронеж, РФ

О теореме о существовании равновесия в игре с вогнуто-выпуклой функцией выигрыша

Аннотация. В центре внимания статьи теория игр. Это раздел математических методов моделирования и прогнозирования экономики, связанный с реализацией формального исследования социальных и экономических ситуаций в условиях конфликта (или сотрудничества). Применение теортико-игровых моделей способно описать взаимодействие нескольких участников (людей, групп людей, фирм) игрового взаимодействия.

***Ключевые слова*: и**гра, теория игр, стратегия, игра двух лиц, теорема, модель, равновесные стратегии.

Суть стратегической игры заключается в зависимости целесообразного выбора действий каждого участника от ожиданий того, что сделает другой. Стратегические игры особенно ярко проявляются в случаях прямого противостояния двух участников игры.

Рассмотрим теорему об игре двух лиц.

Пусть, в игре двух лиц пространства стратегий X и Y являются выпуклыми, замкнутыми и ограничены подмножествами конечномерных пространств [1,с.68]

$X \subset R^n, Y \subset R^m$. И пусть игровые правила $A: Y \multimap X$; $B: X \multimap Y$ замкнутые многозначные отображения с выпуклыми значениями $A(y), B(x)$.

Тогда в данной игре существуют равновесные стратегии, т.е. найдется такая $x_* \in X, y_* \in Y$

$$\begin{cases} x_* \in A(y_*) \\ y_* \in B(x_*) \end{cases}$$

<u>Теорема</u> «О существовании равновесия в антагонистической игре двух лиц».

Пусть, пространства стратегий $X\ u\ Y$ удовлетворяют требованиям теоремы «Об игре двух лиц».

Пусть, игровая функция f, заданная на $X * Y$ со значениями на множестве R

$f: X * Y \to R$, удовлетворяет следующим условиям:

1) f непрерывна;

2) по первому аргументу, т.е. по X эта функция выпукла вверх; т.е. $\forall x_1, x_2 \in X, y \in Y, 0 \le \lambda \le 1$ выполнено следующее соотношение:

$$f\big((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2, y\big) \ge (1-\lambda)f(x_1, y) + \lambda f(x_2, y)$$

3) по второму аргументу, т.е. по y эта функция выпукла вниз, т.е. $\forall x \in X, y_1, y_2 \in Y, 0 \le \mu \le 1$ выполняется следующее соотношение

$$f(x, (1-\mu)y_1 + \mu y_2) \le (1-\mu)f(x, y_1) + \mu f(x, y_2)$$

Тогда при выполнении этих трех условий данная игра имеет равновесные стратегии.

Доказательство теоремы заключается в том, что она сводится к теореме «Об игре двух лиц». Поскольку условия, которые накладываются на пространство стратегий $X\ u\ Y$, такие же, как и в теореме «Об игре двух лиц», остается проверить только, что игровые правила $A(y), B(x)$ удовлетворяют условиям теоремы «Об игре двух лиц», т.е. эти игровые правила являются замкнутыми многозначными отображениями с выпуклыми значениями.

Рассмотрим игровое правило: $B: X \multimap Y$

$$B(x) = \{y \in Y: f(x,y) = \min f(x\tilde{y})\}$$

Проверим, что это многозначное отображение является замкнутым:

$x_n \to x_0, y_n \in B(x_n), y_n \to y_0 \Rightarrow y_0 \in B(x_0)$

Предположим противное, что условия выполнены, но $y_0 \notin B(x_0)$. Это значит, что y_0 не минимизирует значения функции $f(x_0, y_0)$.

Значит должна найтись такая точка $\bar{y} \in Y$, в которой $f(x_0, \bar{y}) < f(x_0, y_0)$, f-непрерывная функция, $x_n \to x_0, y_n \to y_0$. Тогда $f(x_n, \bar{y}) < f(x_0, \bar{y})$.

Это значит, что найдётся такое число N_1, что для всех $n \geq N_1$

$$|f(x_n, \bar{y}) - f(x_0, \bar{y})| < \varepsilon$$

Все значения $f(x_n, \bar{y})$ будут лежать в окрестности ε $f(x_0, \bar{y})$

$$f(x_n, y_n) \to f(x_0, y_0)$$

Найдётся номер N_2, что для всех $n \geq N_2$ $|f(x_n, y_n) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$

Все значения попадают в правую окрестность. Таким образом если $n \geq N = max\{N_1, N_2\}$, то будут выполнены оба соотношения: $f(x_n, \bar{y}) < f(x_n, y_n)$ но $y_n \in B(x_1)$ то есть y_n- минимизатор $f(x_n, y)$[3,с.29]

Получили противоречие.

Покажем, что каждое множество $A(y)$ выпукло.

$A(y) = \{x \in X: f(x,y) = max f(\tilde{x}, y)\}$ $max f(\tilde{x}, y) = \pi(y)$

Возьмём две точки $x_1, x_2 \in A(y)$ промежуточная точка из этого отрезка $(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$, $0 \leq \lambda \leq 1$.

$$f\big((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2, y\big) \geq (1-\lambda)f(x_1, y) + \lambda f(x_2, y) == (1-\lambda)\pi(y) + \lambda\pi(y) = \pi(y)$$

Так как $x_1, x_2 \in A(y)$, то они являются максимизаторами. $(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 \in A(y) \Rightarrow A(y)$ выпукло.

Таким образом, мы видим, что игровые правила удовлетворяют всем требованиям теореме «Об игре двух лиц». [2,с.35]

Ч.т.д.

Замечание. Очевидно, что условия 2 и 3 выполнены в виде равенств в случае, если функция f линейна по каждому из аргументов.

Список литературы

1. Томпсон, А.А. Стратегический менеджмент: искусство разработки и реализации стратегии / А.А.Томпсон, А.Д.Стрикленд; ред. М.И. Соколова и др. – М.: Юнити-Дана, 2015. – С. 68.
2. Диксит, А.К. Теория игр. Искусство стратегического мышления в бизнесе и жизни / А.К. Диксит, Б.Дж. Нейлбафф. – М.: Манн, Иванов и Фербер, 2018. – С. 35.
3. Захаров, А. В. Теория игр в общественных науках: учебник для вузов / А.В. Захаров; Нац. исслед. ун-т «Высшая школа экономики». — М.: Изд. дом Высшей школы экономики, 2015. – С. 29.