Мендель Виктор Васильевич,

кандидат физ.-мат. наук,

доцент кафедры математики и информационных технологий,

ФГБОУ ВО «Тихоокеанский государственный университет»;

Савостина Кристина Владимировна,

студентка,

ФГБОУ ВО «Тихоокеанский государственный университет»,

г. Хабаровск

ПРИМЕНЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА БЮФФОНА ДЛЯ ТЕСТИРОВАНИЯ КАЧЕСТВА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ

Аннотация. В работе рассматривается возможность использования методов из семейства Монте-Карло, а именно – опыта Бюффона, для тестирования последовательностей и генераторов случайных чисел. Авторы исходят из того, что при прочих равных условиях лучшей является такая последовательность, с помощью которой с более высокой точностью вычисляется число π в эксперименте Бюффона. Для реализации эксперимента написано специальное приложение для пакета Scilab.

Ключевые слова: генератор случайных чисел, метод Монте-Карло, задача Бюффона.

В работе рассматривается возможность использования известного эксперимента Бюффона [1], заключающегося в бросании иглы на равномерно разлинованный лист бумаги, для оценки качества генераторов случайных чисел.

Уточним постановку классического эксперимента: на разлинованный параллельными линиями лист бумаги (расстояние между соседними линиями всегда равно $2a$) случайным образом кидают иголку длины $2l$. Вероятность того, что иголка пересечет одну из параллельных линий определяется интегралом [3]:

$$p = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{2}sin\varphi} dy \frac{2}{\pi a} = \frac{2l}{\pi a}\int_0^{\pi} sin\varphi d\varphi = \frac{2l}{\pi a}. \qquad (*)$$

Из этой формулы можно выразить число π:

$$\pi = \frac{2l}{ap} = \frac{2lN}{aN_{\text{благопр}}}. \quad (**)$$

Здесь N – число испытаний, а $N_{\text{благопр}}$ – количество благоприятных исходов.

Теоретически формула (**) позволяет экспериментально вычислять число π, но на практике точность вычисления медленно растет по мере увеличения количества испытаний. Однако этот недостаток можно обратить в достоинство, если применять описанный выше метод не для вычисления числа π, а для оценки свойств генератора случайных чисел, с помощью которого проводится компьютерный эксперимент по его вычислению. Ниже приводится его описание.

Описание компьютерного эксперимента:

1. Исходные данные: длина иглы $2l$, расстояние между линиями $2a$, количество испытаний N.

2. На каждом шаге с помощью генератора случайных чисел определяется три параметра: координаты $x_у$ и $y_у$ «ушка» иголки и угол φ, который иголка составляет с направлением линии сетки. По этим данным рассчитываются координаты конца иголки $x_к$ и $y_к$. Случайное число, используемое для определения очередного значения угла φ, масштабируется на отрезок [0, 2π].

3. Исход испытания считается благоприятным, если округленные с уменьшением до целого выражения $\frac{y_у}{2a}$ и $\frac{y_к}{2a}$ отличаются друг от друга (это аналитическое условие того, что иголка пересекла одну или несколько линий сетки).

Можно предположить, что чем ближе характеристики генератора случайных чисел к идеальным, тем точнее при одном и том же количестве испытаний будет результат.

Данный компьютерный эксперимент был реализован в виде приложения для пакета Scilab 6.1.0, являющегося свободно распространяемым кроссплатформенным программным продуктом (подробности смотри, например, в [2]) – пакетом матричной математики. Благодаря тому, что в Scilab многие операции можно применять к массивам не используя циклы, и тому, что в нем предусмотрена возможность генерирования массивов случайных чисел произвольной размерности с различными законами распределения, код приложения получился компактным и простым для понимания. Листинг приложения для случая, в котором используется генератор равномерного распределения (псевдо) случайных чисел приводится ниже. В первом блоке описываются начальные условия эксперимента (длина иглы и расстояние между линиями сетки) и количество испытаний. Во втором блоке реализуется эксперимент: генерируются «случайные» бросания иглы на лист бумаги и подсчитывается количество благоприятных исходов – пересечений иглой линии сетки. В заключении вычисляется экспериментальное значение числа π.

Листинг 1.

```
//Эксперимент Бюффона
//1. Начальные условия
//1.1 Расстояние между линиями
a=2
//1.2 Длина иголки
l=1
//1.3 Число испытаний
N=100000000
//2. Моделирование эксперимента
//2.1 Генерирование координат "ушка" иголки и угла между иголкой
//и направлением линии сетки
XYu=100000000*a*rand(2,N)
fi=rand(1,N)*2*%pi
//2.2 Вычисление координат "острия иголки"
XYo=zeros(2,N)
XYo(1,:)=XYu(1,:)+l*cos(fi)
XYo(2,:)=XYu(2,:)+l*sin(fi)
```

```
//2.3 Подсчет количества случаев пересечения иголки с линией сетки
Rez=bool2s(int(XYo(2,:)/a)<>int(XYu(2,:)/a))
Nu=sum(Rez)
//2.4 Определение точности эксперимента при вычислении числа Пи
PIexp=2*l*N/(a*Nu)
```

Эксперимент с использованием различных генераторов случайных чисел, встроенных в пакет Scilab 6.1.0 (равномерное распределение, гауссово распределение, биномиальное распределение) показал, что наилучшую точность при многократных повторениях и при одинаковых начальных условиях дает генератор равномерно распределенных случайных чисел, что подтверждает выдвинутое нами ранее предположение. Таким образом, можно считать предложенный метод тестирования генераторов случайных чисел эффективным.

В заключении обратим внимание на интересную особенность, выявившуюся в ходе эксперимента: на начальном этапе координаты «ушка» иголки генерировались в интервале от нуля до единицы. При этом точность вычислений даже при большом количестве испытаний была невысокой. После того, как интервал случайных чисел был масштабирован (длина увеличивалась в тысячи и более раз), произошло существенное увеличение точности вычислений. В листинге случайные числа для координат берутся в интервале от нуля до ста миллионов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hall A. On an experimental determination of Pi // The Messenger of Mathematics. – 1872. – Vol. 2. – P. 113-114.

2. Scilab: Решение инженерных и математических задач / Е.Р. Алексеев, О.В. Чеснокова, Е.А. Рудченко. – М.: ALT Linux; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 260 с.

3. Федотов Н.Г. Методы стохастической геометрии в распознавании образов. – М.: Радио и связь, 1990. – 142 с.