НАУКА И ОБРАЗОВАНИЕ В СОВРЕМЕННОМ МИРЕ: методология, теория и практика

Жулидова Юлия Владимировна,

старший преподаватель кафедры математики

и информационных технологий,

ФГБОУ ВО «ТОГУ»,

г. Хабаровск

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА ВЛАГОПЕРЕНОСА В ПОЧВЕ

Аннотация. В статье описывается процесс математического моделирования влагопереноса в почве учитывая характеристики почвы, особенности и различные подходы к моделированию почвенных процессов, вопрос исследования разрешимости и сходимости разностных методов в специальных функциональных пространствах.

Ключевые слова: модель, моделирование, уравнение влагопереноса, моделирование процессов влагопереноса, уравнение Ричардса.

В процессе изучения различных процессов в почве (например, таких как солеперенос, теплоперенос, влагопернос), было отмечено, что все они так или иначе проходят с участием влаги. А значит именно этот процесс стоит изучить более подробно. [1, 4]

Рассмотрев физические подходы к расчету переноса влаги в почве, в основе которого лежит уравнение Ричардса, мы перешли к изучению ряда важных моментов, которые необходимо учесть при решении уравнения: [1, 4, 5]

1) Для каждого почвенного слоя необходимо определить основную гидрофизическую характеристику в виде дифференциальной влагоемкости

$$C(\theta, P_{K-C}).$$

В большинстве подходов используют приведенное, или относительное значение влажности почв, S_e:

$$S_e = \frac{\theta_i - \theta_r}{\theta_s - \theta_r},$$

где θ_i - текущая влажность, соответствующая капиллярно-сорбционному давлению влаги P_i; θ_S - влажность насыщения; θ_r - остаточная влажность почвы.

В современных моделях чаще всего используют две функции:

Первая была предложена Бруксом и Кори:

$$S_e = \frac{\theta_i - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = \begin{cases} \left|\alpha \cdot P_{K-C}\right|^{-n} \text{ для } P_{K-C} \le -\dfrac{1}{\alpha} \\ 1 \text{ для } P_{K-C} \ge -\dfrac{1}{\alpha} \end{cases},$$

где α - эмпирический параметр, равный величине обратной давлению входа воздуха.

Вторая была предложена американским физиком почв ван Генухтеном:

$$S_e = \frac{\theta_i - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{1+\left(\alpha \cdot P_{K-C}\right)^n}\right)^m \text{ для } P_{K-C} < 0 \\ \theta_s \text{ для } P_{K-C} \ge 0 \end{cases},$$

где $m = 1 - 1/n$, $n > 1$ также является эмпирическим параметром, арактеризующим крутизну наклона ОГХ. И здесь α – эмпирический параметр, равный обратной величине давления входа воздуха.

2) Для каждого почвенного слоя необходимо знать функцию влагопроводности $K_{вл}\left(P_{к-с}\right)$. При этом существует несколько способов определить данную величину:

а. усредняют саму величину влагопроводности,

b. усредняют сначала влажность слоев, а затем находят влагопроводность для усредненной влажности,

c. усреднение с учетом толщины слоя почвы.

В своих вычислениях мы усредняли саму величину влагопроводности.

Для получения функции влагопроводности $K_{вл}(P_{к-с})$ можно воспользоваться зависимостью:

$$K_{вл}(P_{к-с}) = K_S \cdot S_e^{\frac{2}{n}+l+2},$$

где K_S - коэффициент фильтрации для данного почвенного слоя

3) Необходимо задать начальные данные и условия на нижней и верхней границах, иначе невозможно будет свести баланс.

Краевые условия: $\theta(z_0, t) = \theta^0$, $\theta(z_{end}, t) = \theta_0$

Начальные данные: $P_{К-С}(0) = P_0$.

Известно, что движение воды в почве описывается *законом Дарси*. Но на практике используют не уравнение Дарси, а так называемое «модифицированное уравнение Дарси», которое носит название уравнения Ричардса: [2, 4, 5]

$$C(\theta, P_{К-С})\frac{\partial P_{К-С}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(K_{ВЛ}(P_{К-С})\cdot\left(\frac{\partial P_{К-С}}{\partial z} - 1\right)\right) \pm I(z,t),$$

где $P_{к\text{-}с}$ – капиллярно-сорбционное давление влаги, θ – влажность, $K_{вл}(\theta)$ – функция влагопроводности, $\pm I(z,t)$ – это член «источник/сток», т.е. либо добавочное появление воды в рассматриваемом слое, либо, напротив (со знаком минус) её исчезновение.

Для решения исследуемого уравнения, с одной стороны, можно применить функциональный подход. Для этого сводим полученное уравнение Ричардса к абстрактной задаче. [2, 3, 5]

Введя операторы $A=-\frac{1}{C(P)}\left[K(P)\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}+\frac{\partial K(P)}{\partial z}\cdot\frac{\partial P}{\partial z}\right]$ и $f(P)=-\frac{1}{C(P)}\cdot\frac{\partial K(P)}{\partial z}\pm I(z,t)$, поставим задачу Коши вида:

$$\frac{\partial P}{\partial t}+A(P)P=f(P),\ P(0)=P_0.$$

Это позволяет применить абстрактные теоремы о существовании и сходимости разностных методов в специальных функциональных пространствах.

Для решения разностной задачи

$$\frac{\Delta P_k}{\tau}+A_{k+1}P_{k+1}=f_{k+1},\ 0\le k\le k_\tau-1,\ P_0=P_0(\tau),$$

с переменным оператором A(t), удовлетворяющем приведенным выше условиям, справедлива аналогичная оценка пространства «следов».

Пусть Pτ – решение задачи (1) и $P_0\in E_{1-1/p}(0)$. Тогда справедливо неравенство

$$\left|P_k\right|_{E_{1-1/p}(A_k)}\le Mp^2(p-1)^{-1}\left(\left\|f^\tau\right\|_{B_p(\tau)}+\left|P_0\right|_{E_{1-1/p}(A_k)}\right).$$

Полученное неравенство означает, что рассматриваемая разностная задача корректно поставлена, то есть:

○ она однозначно разрешима при любых правых частей и начальных данных из рассмотренных пространств;

○ решение задачи непрерывно зависит от правой части и начальных данных в указанных нормах.

В указанной оценке коэффициент $Mp^2(p-1)^{-1}$ не зависит от τ. Это позволяет утверждать корректность рассматриваемой математической модели влагопереноса в почве на основе закона Дарси.

С другой стороны, в подавляющем большинстве случаев, при решении научно-технических задач, получаемые уравнения не могут быть решены аналитически. Для их решения используют приближенные, в частности, численные методы. [3, 5]

Введем систему символов: $\tau = \Delta t$ и $h = \Delta z$, тогда $t \equiv j\Delta t \equiv j\tau$ и $z \equiv i\Delta z \equiv ih$, где *j*, *i* – номера вертикальных и горизонтальных «нитей» сетки.

Тогда уравнение Ричардса в разностном виде примет вид:

$$C_i^j \frac{P_i^{j+1} - P_i^j}{\tau} = \frac{1}{h}\left[K_{i+1/2}^j\left(\frac{P_i^j - P_{i+1}^j}{h} - 1\right) - K_{i-1/2}^j\left(\frac{P_{i-1}^j - P_i^j}{h} - 1\right)\right],$$

где *i* – номер слоя, *j* – момент времени, P_{i-1}^j, P_i^j, P_{i+1}^j - давление влаги в момент времени *j* в соответствующих слоях.

Прогнозируемая величина давления в момент $j+1$ входит только в левую часть уравнения. Это позволяет переписать его в виде:

$$P_i^{j+1} - P_i^j = A^j \text{ или } P_i^{j+1} = P_i^j + \omega \cdot A^j,$$

где $A^j = \frac{K_{i+1/2}^j}{C_i^j}\left(P_i^j - P_{i+1}^j\right) - \frac{K_{i-1/2}^j}{C_i^j}\left(P_{i-1}^j - P_i^j\right) + \frac{h}{C_i^j}\left(K_{i-1/2}^j - K_{i+1/2}^j\right)$ и $\omega = \frac{\tau}{h^2}$.

Полученное уравнение дает расчетную формулу для прогноза давления на один шаг по времени.

Таким образом, проведенные исследования позволили сформулировать следующие выводы и предложения:

1) для каждого почвенного слоя была определена основная гидрофизическая характеристика в виде дифференциальной влагоемкости и функция влагопроводности;

2) для сведения баланса были заданы начальные данные и условия на нижней и верхней границах.

3) полученное уравнение Ричардса было сведено к абстрактной задаче, что позволило применить абстрактные теоремы о существовании и сходимости разностных методов в специальных функциональных пространствах.

4) уравнение Ричардса было представлено в разностном виде и полученное уравнение дало расчетную формулу для дальнейшего его исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пачепский Я.А. Математические модели физико-химических процессов в почвах / Я.А. Пачепский. – М.: Наука, 1990. – 188 с.

2. Поличка А.Е. Построение математической модели процесса влагопереноса в почве на основе закона Дарси / А.Е. Поличка, Ю.В. Жулидова // Фундаментальные и прикладные научные исследования: актуальные вопросы, достижения и инновации : сборник статей XXIII Международной научно-практической конференции. В 3 ч. Ч. 1. – Пенза: МЦНС «Наука и Просвещение», 2019. – С. 12-15.

3. Поличка А.Е. Функциональный подход к решению уравнения влагопереноса в почве / А.Е. Поличка, Ю.В. Жулидова // Сборник статей XXVМеждународного научно-исследовательского конкурса «Лучшая научная статья 2019». – Пенза: МЦНС «Наука и Просвещение», 2019. – С. 11-14.

4. Системный анализ [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://studfiles.net/preview/4283570/ (дата обращения: 05.06.2019).

5. Шеин Е.В. Математическое моделирование в почвоведении: учебник / Е.В. Шеин, И.М. Рыжова. – М.: ИП Маракушев А.Б., 2016. – 377 с.