Лелонд Ольга Владимировна,

к.ф.-м.н., доцент кафедры прикладной математики и информатики,

ФГБОУ ВО «Тольяттинский государственный университет»

г. Тольятти

АЛГОРИТМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ НОРМЫ ОДНОГО ОПЕРАТОРА В ПРОСТРАНСТВАХ ЛОРЕНЦА

Аннотация. В данной статье рассматривается линейный оператор специального вида, действующий в симметричных пространствах измеримых на отрезке [0,1] функций. Приводятся программы, вычисляющие значения нормы оператора в пространствах p-суммируемых функций и пространствах Лоренца.

***Ключевые слова*:** симметричное пространство, норма оператора, пространства L_p, вогнутая функция, пространство Лоренца.

Пусть $E_{[0,1]}$ – симметричное пространство (СП) на [0,1] [2, с.123]. Определим на $E_{[0,1]}$ оператор A:

$$(Ax)(t,s)=x(t)-x(s)=y(t,s),\ \ 0\le t\le 1,\ \ 0\le s\le 1.$$

Отметим, что определенная выше функция $y(t,s)$ является элементом пространства $E_{[0,1]^2}$. Однако, поскольку пространства $E_{[0,1]}$ и $E_{[0,1]^2}$ изометричны, мы можем не делать различий между ними и обозначать каждое из них через E.

Из оценки $\| x(t)-x(s)\|_E \le 2\| x\|_E$ следует, что $\| A\|_E \le 2$.

В [1, с.14] доказано, что в случае, когда $E=L_p$, справедлива следующая

Теорема 1. Для всех $1\le p\le\infty$ имеет место равенство

$$\| A\|_{L_p}=2^{\max(1/p,1-1/p)}.$$

В таблице 1 представлены программы, вычисляющие значения нормы оператора A для значений p, лежащих в диапазонах $[1;2], [2;4]$ и $[5;\infty)$.

Таблица 1

Программы для вычисления нормы оператора в пространствах L_p

Случай $p \in [1;2]$	Случай $p \in [2;4]$	Случай $p \in [5;\infty)$

Program norm 1;
var x, z, d: real;
function max(x: real): real;
var: p, q: real;
begin p:=x;
q:=1-p;
if p>=q then max:=p else max:=q
end;
begin writeln(‘write d’);
readln(d);
x:=1.05;
while x<=d do
begin
z:=exp(max(1/x)*ln(2));
write(‘ A(‘, x:4:2, ‘)=’z:6:4);
x:=x+0.05
end
end.
	Program norm 2;
	var x, z, d: real;
	function max(x: real): real;
	var: p, q: real;
	begin p:=x;
	q:=1-p;
	if p>=q then max:=p else max:=q
	end;
	begin writeln(‘write d’);
	readln(d);
	x:=2.1;
	while x<=d do
	begin
	z:=exp(max(1/x)*ln(2));
	write(‘ A(‘, x:3:1, ‘)=’z:6:4);
	x:=x+0.1
	end
	end.
		Program norm 3;
		var x, z, d: real;
		function max(x: real): real;
		var: p, q: real;
		begin p:=x;
		q:=1-p;
		if p>=q then max:=p else max:=q
		end;
		begin writeln(‘write d’);
		readln(d);
		x:=5.0;
		while x<=d do
		begin
		z:=exp(max(1/x)*ln(2));
		write(‘ A(‘, x:5:1, ‘)=’z:6:4);
		x:=x+1.0
		end
		end.

Результаты работы программ при d=2, d=4 и d=100 соответственно приведены в таблице 2.

Таблица 2

Значения нормы оператора в пространствах L_p

p	$\|\|A\|\|_{L_p}$	p	$\|\|A\|\|_{L_p}$	p	$\|\|A\|\|_{L_p}$	p	$\|\|A\|\|_{L_p}$	p	$\|\|A\|\|_{L_p}$	p	$\|\|A\|\|_{L_p}$
1.00	2.0000	2.1	1.4377	5.0	1.7411	26.0	1.9474	51.0	1.9730	76.0	1.9818
1.05	1.9351	2.2	1.4595	6.0	1.7818	27.0	1.9493	52.0	1.9735	77.0	1.9821
1.10	1.8779	2.3	1.4796	7.0	1.8114	28.0	1.9511	53.0	1.9740	78.0	1.9823

1.15	1.8271	2.4	1.4983	8.0	1.8340	29.0	1.9528	54.0	1.9745	79.0	1.9825
1.20	1.7818	2.5	1.5157	9.0	1.8517	30.0	1.9543	55.0	1.9750	80.0	1.9827
1.25	1.7411	2.6	1.5320	10.0	1.8661	31.0	1.9558	56.0	1.9754	81.0	1.9830
1.30	1.7044	2.7	1.5472	11.0	1.8779	32.0	1.9571	57.0	1.9758	82.0	1.9832
1.35	1.6710	2.8	1.5614	12.0	1.8877	33.0	1.9584	58.0	1.9762	83.0	1.9834
1.40	1.6407	2.9	1.5748	13.0	1.8962	34.0	1.9596	59.0	1.9766	84.0	1.9836
1.45	1.6129	3.0	1.5874	14.0	1.9034	35.0	1.9608	60.0	1.9770	85.0	1.9838
1.50	1.5874	3.1	1.5993	15.0	1.9097	36.0	1.9619	61.0	1.9774	86.0	1.9839
1.55	1.5639	3.2	1.6105	16.0	1.9152	37.0	1.9629	62.0	1.9778	87.0	1.9841
1.60	1.5422	3.3	1.6211	17.0	1.9201	38.0	1.9638	63.0	1.9781	88.0	1.9843
1.65	1.5221	3.4	1.6311	18.0	1.9244	39.0	1.9648	64.0	1.9785	89.0	1.9845
1.70	1.5034	3.5	1.6407	19.0	1.9284	40.0	1.9656	65.0	1.9788	90.0	1.9847
1.75	1.4860	3.6	1.6497	20.0	1.9319	41.0	1.9665	66.0	1.9791	91.0	1.9848
1.80	1.4697	3.7	1.6583	21.0	1.9351	42.0	1.9673	67.0	1.9794	92.0	1.9850
1.85	1.4545	3.8	1.6665	22.0	1.9380	43.0	1.9680	68.0	1.9797	93.0	1.9851
1.90	1.4402	3.9	1.6743	23.0	1.9406	44.0	1.9687	69.0	1.9800	94.0	1.9853
1.95	1.4268	4.0	1.6818	24.0	1.9431	45.0	1.9694	70.0	1.9803	95.0	1.9855
2.00	1.4142			25.0	1.9453	46.0	1.9701	71.0	1.9806	96.0	1.9856
						47.0	1.9707	72.0	1.9808	97.0	1.9858
						48.0	1.9713	73.0	1.9811	98.0	1.9859
						49.0	1.9719	74.0	1.9814	99.0	1.9860
						50.0	1.9725	75.0	1.9816	100.0	1.9862

Результаты вычислений наглядно подтверждают, что при изменении p от 1 до 2 значение $\| A\|_{L_p}$ монотонно убывает от 2 до $\sqrt{2} \approx 1.4142$, а при изменении p от 2 до ∞ – монотонно возрастает от $\sqrt{2} \approx 1.4142$ до 2.

Пусть $\varphi(t)$ – вогнутая возрастающая непрерывная в нуле функция на $[0,1]$, $\varphi(0)=0$. Рассмотрим пространство Лоренца $\Lambda(\varphi)$ с нормой

$$\| x\|_{\Lambda(\varphi)} = \int_0^1 x^*(t)d\varphi(t),$$

где $x^*(t)$ – убывающая перестановка функции $|x(t)|$ [2, с.145].

Обозначим через Λ_α пространство Лоренца, построенное по функции $\varphi(t)=t^\alpha$ $(0<\alpha<1)$. В [1, с.16] доказана следующая

Теорема 2. Для любого $\alpha\in(0,1)$ справедливо равенство

$$\|A\|_{\Lambda_\alpha}=2^\alpha\left(1+3^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right)^{1-\alpha}.$$

Ниже представлена программа, вычисляющая значения нормы оператора для значений α из промежутка $(0,1)$ с шагом 0.01.

```
Program norm 4;
var a,b: real;
begin b:=0.01;
while b<=0.99 do
begin a:=exp(b*ln(2))*exp((1-b)*ln(1+exp(b/(b-1)*ln(3))));
write(‘ a(‘, b:4:2, ‘)=’, a:6:4);
b:=b+0.01
end
end.
```

Результаты работы программы приведены в таблице 3.

Таблица 3

Значения нормы оператора в пространствах Λ_α

α	$\|\|A\|\|_{\Lambda_\alpha}$	α	$\|\|A\|\|_{\Lambda_\alpha}$	α	$\|\|A\|\|_{\Lambda_\alpha}$	α	$\|\|A\|\|_{\Lambda_\alpha}$	α	$\|\|A\|\|_{\Lambda_\alpha}$	α	$\|\|A\|\|_{\Lambda_\alpha}$
0.01	1.9891	0.18	1.8225	0.35	1.6971	0.51	1.6308	0.68	1.6502	0.85	1.8030
0.02	1.9783	0.19	1.8139	0.36	1.6913	0.52	1.6289	0.69	1.6554	0.86	1.8153
0.03	1.9676	0.20	1.8054	0.37	1.6856	0.53	1.6273	0.70	1.6611	0.87	1.8278
0.04	1.9570	0.21	1.7971	0.38	1.6802	0.54	1.6261	0.71	1.6673	0.88	1.8404
0.05	1.9466	0.22	1.7889	0.39	1.6750	0.55	1.6252	0.72	1.6740	0.89	1.8532
0.06	1.9363	0.23	1.7809	0.40	1.6699	0.56	1.6247	0.73	1.6812	0.90	1.8661
0.07	1.9261	0.24	1.7730	0.41	1.6651	0.57	1.6245	0.74	1.6889	0.91	1.8790
0.08	1.9160	0.25	1.7653	0.42	1.6606	0.58	1.6247	0.75	1.6972	0.92	1.8921
0.09	1.9061	0.26	1.7577	0.43	1.6562	0.59	1.6253	0.76	1.7059	0.93	1.9053

0.10	1.8963	0.27	1.7503	0.44	1.6521	0.60	1.6263	0.77	1.7151	0.94	1.9185
0.11	1.8866	0.28	1.7431	0.45	1.6483	0.61	1.6277	0.78	1.7248	0.95	1.9319
0.12	1.8770	0.29	1.7360	0.46	1.6447	0.62	1.6295	0.79	1.7349	0.96	1.9453
0.13	1.8676	0.30	1.7291	0.47	1.6413	0.63	1.6318	0.80	1.7454	0.97	1.9588
0.14	1.8583	0.31	1.7223	0.48	1.6383	0.64	1.6345	0.81	1.7563	0.98	1.9725
0.15	1.8492	0.32	1.7157	0.49	1.6355	0.65	1.6377	0.82	1.7675	0.99	1.9862
0.16	1.8402	0.33	1.7093	0.50	1.6330	0.66	1.6414	0.83	1.7791		
0.17	1.8313	0.34	1.7031			0.67	1.6456	0.84	1.7909		

Результаты вычислений показывают, что при стремлении α к 0 и 1 значение $\| A\|_{\Lambda_\alpha}$ приближается к 2; при изменении α от 0 до 1 величина $\| A\|_{\Lambda_\alpha}$ сначала монотонно убывает от 2 до значения, приближенно равного 1.6245 (этому значению в таблице 3 соответствует $\alpha = 0.57$), а затем монотонно возрастает до 2.

Вновь рассмотрим пространство Лоренца $\Lambda(\varphi)$, где $\varphi(t)$ – вогнутая возрастающая непрерывная в нуле функция на [0,1], $\varphi(0)=0$. В [1, с.17] доказана

Теорема 3. Если $\overline{\lim_{t\to 0}}[\varphi(2t)/\varphi(t)]=2$, то $\| A\|_{\Lambda(\varphi)}=2$.

В случае, когда непосредственное вычисление (аналитическим путем) предела в условии теоремы затруднительно, можно попытаться использовать численный подход. Если для некоторой последовательности t_n, сходящейся к 0, окажется, что $\varphi(2t_n)/\varphi(t_n)\to 2$, то можно сделать вывод, что $\| A\|_{\Lambda(\varphi)}=2$.

Рассмотрим функции $\varphi_1(x) = 1 - e^{-x}, \varphi_2(x) = \ln(x+1)$.

Обе они удовлетворяют описанным выше условиям. Этим же условиям будут удовлетворять образованные из них функции $\psi_1(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x), \psi_2(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(\varphi_1(x)) = 1 - e^{-x} + \ln(2 - e^{-x})$, $\psi_3(x) = \varphi_2(x) + \varphi_2(\varphi_1(x)) = \ln(x+1) + \ln(2 - e^{-x})$.

В таблице 4 представлены программы, вычисляющие значения элементов последовательностей $B(t_n) = \psi_1(2t_n)/\psi_1(t_n)$ и $C(t_n) = \psi_2(2t_n)/\psi_2(t_n)$ для последовательности $t_n = 0.001 - 0.00001(n-1)$.

Таблица 4

Программы для вычисления значений $B(t_n)$ и $C(t_n)$

<table>
<tr><th>$B(t_n)$</th><th>$C(t_n)$</th></tr>
<tr><td>Program psi1;
var x,z,d: real;
function fi(x: real): real;
var p: real;
begin p:=1-exp(-x)+ln(x+1);
fi:=p
end;
begin writeln(‘write d’);
readln(d);
x:=0.001;
while x>=d do
begin
z:=(fi(2*x))/(fi(x));
write(‘ B(‘, x:7:5,‘)=’, z:8:6);
x:=x-0.00001
end
end.</td><td>Program psi2;
var x,z,d: real;
function fi(x: real): real;
var p: real;
begin p:=1-exp(-x)+ln(2-exp(-x));
fi:=p
end;
begin writeln(‘write d’);
readln(d);
x:=0.001;
while x>=d do
begin
z:=(fi(2*x))/(fi(x));
write(‘ C(‘, x:7:5,‘)=’, z:8:6);
x:=x-0.00001
end
end.</td></tr>
</table>

Результаты работы программ при d=0.00001 для функций ψ_1 и ψ_2 приведены в таблицах 5 и 6 соответственно.

Таблица 5

Значения $B(t_n)$

t_n	$B(t_n)$	t_n	$B(t_n)$	t_n	$B(t_n)$	t_n	$B(t_n)$

0.00100	1.999001	0.00075	1.999251	0.00050	1.999500	0.00025	1.999750
0.00099	1.999011	0.00074	1.999261	0.00049	1.999510	0.00024	1.999760
0.00098	1.999021	0.00073	1.999271	0.00048	1.999520	0.00023	1.999770
0.00097	1.999031	0.00072	1.999281	0.00047	1.999530	0.00022	1.999780
0.00096	1.999041	0.00071	1.999291	0.00046	1.999540	0.00021	1.999790
0.00095	1.999051	0.00070	1.999300	0.00045	1.999550	0.00020	1.999800
0.00094	1.999061	0.00069	1.999310	0.00044	1.999560	0.00019	1.999810
0.00093	1.999071	0.00068	1.999320	0.00043	1.999570	0.00018	1.999820
0.00092	1.999081	0.00067	1.999330	0.00042	1.999580	0.00017	1.999830
0.00091	1.999091	0.00066	1.999340	0.00041	1.999590	0.00016	1.999840
0.00090	1.999101	0.00065	1.999350	0.00040	1.999600	0.00015	1.999850
0.00089	1.999111	0.00064	1.999360	0.00039	1.999610	0.00014	1.999860
0.00088	1.999121	0.00063	1.999370	0.00038	1.999620	0.00013	1.999870
0.00087	1.999131	0.00062	1.999380	0.00037	1.999630	0.00012	1.999880
0.00086	1.999141	0.00061	1.999390	0.00036	1.999640	0.00011	1.999890
0.00085	1.999151	0.00060	1.999400	0.00035	1.999650	0.00010	1.999900
0.00084	1.999161	0.00059	1.999410	0.00034	1.999660	0.00009	1.999910
0.00083	1.999171	0.00058	1.999420	0.00033	1.999670	0.00008	1.999920
0.00082	1.999181	0.00057	1.999430	0.00032	1.999680	0.00007	1.999930
0.00081	1.999191	0.00056	1.999440	0.00031	1.999690	0.00006	1.999940
0.00080	1.999201	0.00055	1.999450	0.00030	1.999700	0.00005	1.999950
0.00079	1.999211	0.00054	1.999460	0.00029	1.999710	0.00004	1.999960
0.00078	1.999221	0.00053	1.999470	0.00028	1.999720	0.00003	1.999970
0.00077	1.999231	0.00052	1.999480	0.00027	1.999730	0.00002	1.999980
0.00076	1.999241	0.00051	1.999490	0.00026	1.999740	0.00001	1.999990

Таблица 6

Значения $C(t_n)$

t_n	$C(t_n)$	t_n	$C(t_n)$	t_n	$C(t_n)$	t_n	$C(t_n)$
0.00100	1.998502	0.00075	1.998876	0.00050	1.999251	0.00025	1.999625
0.00099	1.998517	0.00074	1.998891	0.00049	1.999266	0.00024	1.999640
0.00098	1.998532	0.00073	1.998906	0.00048	1.999281	0.00023	1.999655

0.00097	1.998547	0.00072	1.998921	0.00047	1.999296	0.00022	1.999670
0.00096	1.998562	0.00071	1.998936	0.00046	1.999311	0.00021	1.999685
0.00095	1.998577	0.00070	1.998951	0.00045	1.999325	0.00020	1.999700
0.00094	1.998592	0.00069	1.998966	0.00044	1.999340	0.00019	1.999715
0.00093	1.998607	0.00068	1.998981	0.00043	1.999355	0.00018	1.999730
0.00092	1.998622	0.00067	1.998996	0.00042	1.999370	0.00017	1.999745
0.00091	1.998637	0.00066	1.999011	0.00041	1.999385	0.00016	1.999760
0.00090	1.998652	0.00065	1.999026	0.00040	1.999400	0.00015	1.999775
0.00089	1.998667	0.00064	1.999041	0.00039	1.999415	0.00014	1.999790
0.00088	1.998682	0.00063	1.999056	0.00038	1.999430	0.00013	1.999805
0.00087	1.998697	0.00062	1.999071	0.00037	1.999445	0.00012	1.999820
0.00086	1.998712	0.00061	1.999086	0.00036	1.999460	0.00011	1.999835
0.00085	1.998727	0.00060	1.999101	0.00035	1.999475	0.00010	1.999850
0.00084	1.998742	0.00059	1.999116	0.00034	1.999490	0.00009	1.999865
0.00083	1.998757	0.00058	1.999131	0.00033	1.999505	0.00008	1.999880
0.00082	1.998772	0.00057	1.999146	0.00032	1.999520	0.00007	1.999895
0.00081	1.998787	0.00056	1.999161	0.00031	1.999535	0.00006	1.999910
0.00080	1.998802	0.00055	1.999176	0.00030	1.999550	0.00005	1.999925
0.00079	1.998816	0.00054	1.999191	0.00029	1.999565	0.00004	1.999940
0.00078	1.998831	0.00053	1.999206	0.00028	1.999580	0.00003	1.999955
0.00077	1.998846	0.00052	1.999221	0.00027	1.999595	0.00002	1.999970
0.00076	1.998861	0.00051	1.999236	0.00026	1.999610	0.00001	1.999985

Результаты вычислений показывают, что при стремлении t_n к нулю $B(t_n)$ и $C(t_n)$ стремятся к 2, поэтому можно сделать вывод, что

$$||A||_{\Lambda(\psi_1)} = ||A||_{\Lambda(\psi_2)} = 2.$$

Пусть теперь оператор A действует в пространстве $\Lambda(\psi_3)$. Рассмотрим последовательность $t_n = 0.0001 - (n-1)0.000001$. Ниже представлена программа, вычисляющая значения элементов последовательности $D(t_n) = \psi_3(2t_n)/\psi_3(t_n)$.

Program psi3;

```
var x,z,d: real;
function fi(x: real): real;
var p: real;
begin p:=ln(2-exp(-x))+ln(x+1);
fi:=p
end;
begin writeln(‘write d’);
readln(d);
x:=0.0001;
while x>d do
begin
z:=(fi(2*x))/(fi(x));
write(‘ D(‘, x:8:6,‘)=’, z:9:7);
x:=x-0.000001
end
end.
```

Результаты работы программы для $d = 9 \cdot 10^{-7}$ приведены в таблице 7.

Таблица 7

Значения $D(t_n)$

t_n	$D(t_n)$	t_n	$D(t_n)$	t_n	$D(t_n)$	t_n	$D(t_n)$
0.000100	1.9998500	0.000075	1.9998875	0.000050	1.9999249	0.000025	1.9999624
0.000099	1.9998515	0.000074	1.9998890	0.000049	1.9999265	0.000024	1.9999638
0.000098	1.9998530	0.000073	1.9998905	0.000048	1.9999279	0.000023	1.9999654
0.000097	1.9998545	0.000072	1.9998920	0.000047	1.9999295	0.000022	1.9999669
0.000096	1.9998560	0.000071	1.9998935	0.000046	1.9999310	0.000021	1.9999684
0.000095	1.9998575	0.000070	1.9998950	0.000045	1.9999324	0.000020	1.9999700
0.000094	1.9998590	0.000069	1.9998965	0.000044	1.9999339	0.000019	1.9999714
0.000093	1.9998605	0.000068	1.9998980	0.000043	1.9999354	0.000018	1.9999728
0.000092	1.9998620	0.000067	1.9998995	0.000042	1.9999370	0.000017	1.9999745
0.000091	1.9998635	0.000066	1.9999009	0.000041	1.9999385	0.000016	1.9999758

0.000090	1.9998650	0.000065	1.9999025	0.000040	1.9999399	0.000015	1.9999773
0.000089	1.9998665	0.000064	1.9999040	0.000039	1.9999414	0.000014	1.9999790
0.000088	1.9998680	0.000063	1.9999055	0.000038	1.9999430	0.000013	1.9999803
0.000087	1.9998695	0.000062	1.9999070	0.000037	1.9999444	0.000012	1.9999820
0.000086	1.9998710	0.000061	1.9999085	0.000036	1.9999459	0.000011	1.9999833
0.000085	1.9998725	0.000060	1.9999100	0.000035	1.9999474	0.000010	1.9999848
0.000084	1.9998740	0.000059	1.9999114	0.000034	1.9999489	0.000009	1.9999863
0.000083	1.9998755	0.000058	1.9999130	0.000033	1.9999504	0.000008	1.9999877
0.000082	1.9998770	0.000057	1.9999145	0.000032	1.9999519	0.000007	1.9999890
0.000081	1.9998785	0.000056	1.9999159	0.000031	1.9999534	0.000006	1.9999906
0.000080	1.9998800	0.000055	1.9999175	0.000030	1.9999550	0.000005	1.9999917
0.000079	1.9998815	0.000054	1.9999190	0.000029	1.9999564	0.000004	1.9999937
0.000078	1.9998830	0.000053	1.9999205	0.000028	1.9999580	0.000003	1.9999948
0.000077	1.9998845	0.000052	1.9999220	0.000027	1.9999595	0.000002	1.9999952
0.000076	1.9998860	0.000051	1.9999235	0.000026	1.9999610	0.000001	1.9999973

Результаты вычислений показывают, что при стремлении t_n к нулю $D(t_n)$ стремится к 2, поэтому можно сделать вывод, что $||A||_{\Lambda(\psi_3)} = 2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ерофеева О. В. (Лелонд О. В.) Вычисление нормы одного оператора в пространствах Лоренца // Труды математического факультета. – Воронеж, 1997. – №2. – С. 14–18.

2. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. – М.: Наука, 1978. – 400 с.