

**Соколов Илья Сергеевич,**  
магистрант кафедры математики  
ФГБОУ ВО «Вологодский государственный университет, г. Вологда

**Митенева Светлана Феодосьевна,**  
канд.пед.наук, доцент кафедры математики  
ФГБОУ ВО «Вологодский государственный университет, г. Вологда

## ПРОГРАММА ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА ПО МАТЕМАТИКЕ «ФРАКТАЛЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ»

**Аннотация:** Элективный курс «Фракталы и их применение» знакомит учащихся средней школы с классическими фракталами, историей их возникновения, способами построения, нахождением размерности.

**Ключевые слова:** фрактал, самоподобие, компьютерные программы, информационные технологии, элективный курс, профильное обучение.

### Пояснительная записка

Современное молодое поколение отличается нацеленностью на приобретение прикладных знаний и умений. Возрастающая потребность общества в людях, способных творчески подходить к любым изменениям, нетрадиционно и качественно решать существующие проблемы, обусловлена ускорением темпов развития общества и, как следствие, необходимостью подготовки людей к жизни в быстроменяющихся условиях [2].

Стандартный курс математики построен на основе изучения классических разделов, сформировавшихся в основном до XX века. Обучающиеся в рамках школьной программы практически не имеют возможности для знакомства с современными математическими теориями, их интересными и обширными приложениями.

Знакомство с современными направлениями развития математики, новыми теоретическими методами исследований, использованием компьютерных программ и технологий для решения учебных и научных задач может

осуществляться в рамках факультативных или элективных курсов, которые открывают большие возможности для реализации познавательных интересов учащихся и развития личности в целом [1]. В этом случае большую помощь школьному учителю может оказать привлечение к разработке и проведению занятий преподавателей, аспирантов и студентов университетов. Такие курсы могут быть организованы не только в виде элективного курса, но и в летних математических школах, школах для одаренных детей и т.д. [4]

Основной целью данного курса является знакомство учащихся с теорией динамических систем, фракталов и хаоса, ее приложениями в различных областях знания.

Задачами элективного курса являются: повышение уровня математического мышления учащихся; формирование знаний о прикладных возможностях математики; формирование навыков использования информационных ресурсов и информационных технологий в практике [3].

Таблица 1 - Тематическое планирование

№ п/п	Тема занятия	Кол-во часов
1	Историческая справка. Фрактал. Основные понятия.	1
2	Знакомство с программой Apophysis X7. Алгоритм Скотта Дрейвса.	2
3	Построение «Брошь» в программе Apophysis X7	2
4	Построение «Завиток» в программе Apophysis X7	2
5	Построение «Витраж» в программе Apophysis X7	2
6	Построение «Цветы на снегу» в программе Apophysis X7	2
7	Построение «Гнездо дракона» в программе Apophysis X7	2
8	Творческая работа	2
Итого		15

Таблица 2 – Содержание курса

Основное содержание	Формы организации	Виды деятельности
<b>Историческая справка. Фрактал. Основные понятия (1ч)</b> Фрактал, типы фракталов, Салфетка Серпинского, Множество Мандельброта, Кривые Хабенихта	Диалог с учителем	Организация диалога с учителем, рассматривают различные примеры, делятся мнениями
<b>Знакомство с программой Apophysis X7. Алгоритм Скотта Дрейвса (2ч)</b>	Беседа, практическая работа	Раскрытие понятий флейм, рендеринг, трансформация, градиент, знакомятся с

Панель инструментов, окна просмотров, флейм, трансформация, переменные, рендеринг, градиент, алгоритм Скотта Дрейвса		основными компонентами программы, объяснят алгоритм Скотта Дрейвса
<b>Моделирование (10ч)</b> Модель, этапы моделирования, исследование моделей, информационная модель	Исследовательская работа, практическая работа	Раскрытие понятий «Модель, Флейм, Рендеринг, Трансформация, Градиент», создание моделей, создание графических изображений
<b>Творческая работа (2ч)</b> Защита творческих работ	Исследовательская работа, индивидуальная работа.	Создание собственных объектов. Редактирование, преобразование созданных объектов. Защита творческих работ [5]

### Содержание занятий

Занятие 1. Историческая справка. Типы фракталов.

Цель: Познакомить учащихся с основными понятиями и историей фракталов, типами фракталов, фракталами в окружающем мире и их применении.

Примерное содержание:

Фрактальная геометрия возникла в XIX веке. Кантор с помощью простой повторяющейся процедуры превратил линию в набор несвязанных точек, при этом была получена так называемая Пыль Кантора. Он брал линию и удалял из нее центральную треть, после этого повторял то же самое с оставшимися отрезками. Накопление данных о таких странных объектах шло вплоть до XX века.

Слово «fractal» ввел Бенуа Р. Мандельброт от латинского слова «fractus», что означает разбитый, т.е. поделенный на части. Одним из определений фрактала является следующее: фрактал - это геометрическая фигура, состоящая из частей и которая может быть поделена на части, каждая из которых будет представлять уменьшенную копию целого. То есть фрактал - это такой объект, для которого не важно с каким усилением его рассматривать в увеличительное стекло, но при всех его увеличениях структура остается одной и той же.

Структуры большие по масштабу полностью повторяют структуры меньшие по масштабу.

Одним из основных свойств фракталов является самоподобие. Размерность объекта показывает по какому закону растет его внутренняя область, но его размерность - величина не целая, а дробная. Поэтому граница фрактальной фигуры не линия: при большом увеличении становится видно, что она размыта и вся состоит из спиралей и завитков, повторяющих в малом масштабе саму фигуру.

Фракталы делятся на группы. Самые большие группы это: геометрические, алгебраические и стохастические фракталы.

#### Геометрические фракталы

Именно с них и начиналась история фракталов. Этот тип фракталов получается путем простых геометрических построений. Обычно при построении этих фракталов поступают так: берется "затравка" - аксиома - набор отрезков, на основании которых будет строиться фрактал. Далее к этой "затравке" применяют набор правил, который преобразует ее в какую-либо геометрическую фигуру. Далее к каждой части этой фигуры применяют опять тот же набор правил. С каждым шагом фигура будет становиться все сложнее и сложнее, и если провести бесконечное количество преобразований - получится геометрический фрактал.

#### Алгебраические фракталы

Свое название они получили за то, что их строят на основе алгебраических формул иногда весьма простых. Методов получения алгебраических фракталов несколько. Один из методов представляет собой многократный (итерационный) расчет функции  $Z_{n+1}=f(Z_n)$ , где  $Z$  - комплексное число, а  $f$  некая функция. Расчет данной функции продолжается до выполнения определенного условия. И когда это условие выполнится - на экран выводится точка. При этом значения функции для разных точек комплексной плоскости может иметь разное поведение: с течением времени стремится к бесконечности; стремится к 0; принимает несколько фиксированных значений и не выходит за их пределы.

## Стохастические фракталы

Типичный представитель данного класса фракталов "Плазма". Для ее построения берут прямоугольник и для каждого его угла определяют цвет. Далее находят центральную точку прямоугольника и раскрашивают ее в цвет равный среднему арифметическому цветов по углам прямоугольника плюс некоторое случайное число. Чем больше случайное число - тем более "рваным" будет рисунок. Если цвет точки - это высота над уровнем моря, то получится вместо плазмы - горный массив. Именно на этом принципе моделируются горы в большинстве программ. С помощью алгоритма, похожего на плазму строится карта высот, к ней применяются различные фильтры, накладывается текстура и фотореалистичные горы готовы.

Занятие 2. Знакомство с программой ApophysisX7. Алгоритм Скотта Дрейвса.

Цель: Познакомить учащихся с основными компонентами программы ApophysisX7, обсудить принцип работы программы, используя алгоритм Скотта Дрейвса.

Примерное содержание:

Для изучения фракталов была выбрана программа ApophysisX7. Преимущество ее в том, что она представляет собой знакомый интерфейс графического редактора с большим набором инструментов. Базируется программа на применении алгоритма Скотта Дрейвса [6].

Основным средством построения фракталов является треугольник, который задается точками в координатной плоскости. Этим треугольникам задаются атрибуты в шести основных вкладках: вкладка Triangle, вкладка Transform, вкладка Colors, вкладка Variations, вкладка Variables, вкладка Chaos.

Занятие 3. Построение «Наутилус» в программе ApophysisX7.

Вид занятия – лабораторно-практическое занятие.

Примерное содержание:

В редакторе треугольников создаем треугольники и задаем соответствующие атрибуты.

1 треугольник	2 треугольник
Weight: 0.518674 Вкладка Variations: eyefish: 0.0756005 julia3Dz: 0.9244 Вкладка Vatiables: julia3Dz_power: 2 Вкладка Triangle: X: (0.549348;1.26829) Y: (-0.36736;0.712272) O: (0.369001;0,531925) Вкладка Colors: Transform color: 0.015 Color speed: 0.361	Weight: 0.481326 Вкладка Variations: pre_blur: 1 ngon: 0.138 Вкладка Vatiables: ngon_sides: 10 ngon_power: 1.059 ngon_cirde: 2 ngon_corners: 4 Вкладка Triangle: X: (0.061485;1.26428) Y: (0.188018;0.277407) O: (0.618186;0.834108) Вкладка Colors: Transform color: 1.000 Color speed: 0.747
3 треугольник	4 треугольник
Weight: 1 Вкладка Variations: linear: 1 Вкладка Triangle: X: (1.10947;-0.938524) Y: (0.488396;0.17706) O: (0.24114;-0.691268) Вкладка Colors: Transform color: 0.000 Color speed: 1	Weight: 0.5 Вкладка Variations: bubble: 0.281 pre_blur: 1 Вкладка Colors: Transform color: 0.000 Color speed: -0.955

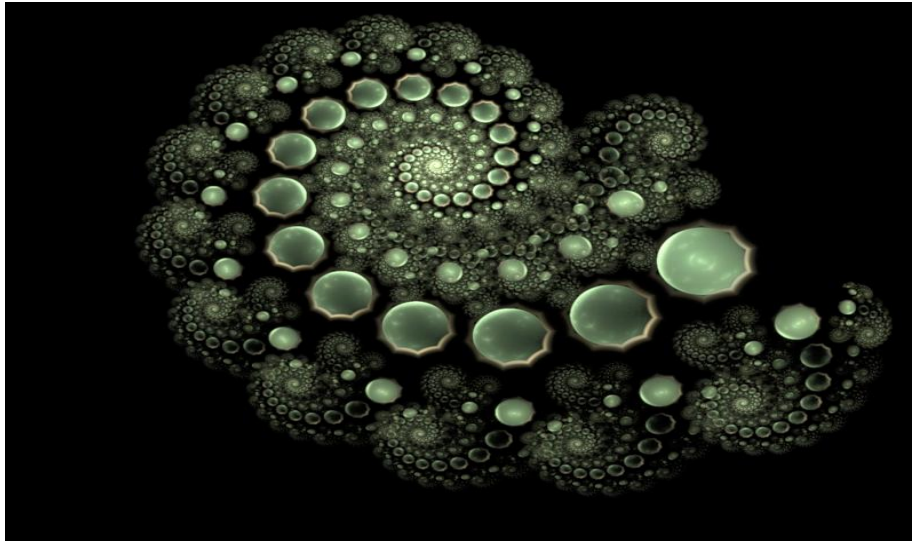


Рисунок 1 – Фрактал «Наutilus»

Все остальные атрибуты на вкладках всех треугольников оставляем без изменений. В завершении нужно выбрать цвет фрактала, размер, формат и отрендерить проект.

#### Занятие 4. Построение «Вихрь» в программе ApophysisX7.

Цель: Познакомить учащихся с особенностями, методами и приемами построения фракталов в программе ApophysisX7.

В редакторе треугольников нужно везде учитывать Linear: 0.

1 треугольник	2 треугольник
Weight: 25	Weight: 1.916
Вкладка Variations:	Вкладка Variations:
spherical: 0.092	bubble: 0.996
loonie: 0.018	pre_blur: 1.555
foci: 0.001	Вкладка Triangle:
crop: 0.008	X: (-1.12016;0)
Вкладка Vatiables:	Y: (0;1)
crop_left: -1	O: (-0.004471;1.04682)
crop_top: -3.21	Вкладка Colors:
crop_right: 1	Transform color: 1.000
crop_bottom: 1	Color speed: -0.086
crop_scatter_ared: 0	
crop_zero: 0	

<p>Вкладка Triangle:  X: (-0.841708;0.702754)  Y: (-1,69053;-0,602209)  O: (0.613574;-0.374041)</p> <p>Вкладка Colors  TransformColor: 0.031  Color speed: 0.99</p> <p>Вкладка Хаос  to 1: 13  to 2: 3  to 3: 3  to 4: 1  to 5: 1</p>	
3 треугольник	4 треугольник
<p>Weight: 0.5  Вкладка Variations:  bubble: 0.307  pre_blur: 1  cross: 0.037</p> <p>Вкладка Triangle:  X: (0.876441;0.48151)  Y: (-0.48151;0.876441)  O: (1.65782;-0.065625)</p> <p>Вкладка Colors:  Transform color: 0.195  Color speed: -0.259</p>	<p>Weight: 0.5  Вкладка Variations:  gaussian_blur: 0.073</p> <p>Вкладка Triangle:  X: (1;0)  Y: (0;1)  O: (1.30086;-0.826902)</p> <p>Вкладка Colors:  Transform color: 0.000  Color speed: -0.707</p>
5 треугольник	
<p>Weight: 8.695  Вкладка Variations:  pre_blur: 1  nemisphere: 0.118</p> <p>Вкладка Colors:  Transform color: 0.000  Color speed: 0</p>	





Рисунок 2 – Фрактал «Вихрь»

Все остальные атрибуты на вкладках всех треугольников оставляем без изменений. В завершении нужно выбрать цвет фрактала, размер, формат и отрендерить проект.

#### Занятие 5. Построение «Залп» в программе ArophysisX7.

Цель: Познакомить учащихся с особенностями, методами и приемами построения фракталов в программе ArophysisX7.

Примерное содержание:

В редакторе треугольников создаем треугольники и задаем соответствующие атрибуты.

1 треугольник	2 треугольник
Weight: 50 Вкладка Variations: edisc: 15 Вкладка Triangle: X: (0.396932;-0.95962) Y: (0.850624;0.403882) O: (-0.057973;-0.051023) Вкладка Chaos to 1: 0 to 2: 0 to 3: 1	Weight: 5 Вкладка Variations: pre_blur: 2 julian: 22 Вкладка Variables: julian_power: 35 julian_dist: -1 Вкладка Triangle: X: (2.57135;1.08945) Y: (0.360251;1.75155) O: (1.13475;0.314949)
3 треугольник	
Weight: 0.5	

Вкладка Variations:  
 loonie: 0.992  
 Вкладка Triangle:  
 X: (-2.07725;0.190993)  
 Y: (-0.821383;-0.459244)  
 O: (-1.1242;0.493806)  
 Вкладка Chaos  
 to 1: 3  
 to 2: 1  
 to 3: 1



Рисунок 3 – Фрактал «Залп»

Все остальные атрибуты на вкладках всех треугольников оставляем без изменений. В завершении нужно выбрать цвет фрактала, размер, формат и отрендерить проект.

Занятие 6. Построение «Зимний букет» в программе ApophysisX7.

Цель: Познакомить учащихся с особенностями, методами и приемами построения фракталов в программе ApophysisX7.

Примерное содержание:

В редакторе треугольников создаем треугольники и задаем соответствующие атрибуты.

1 треугольник	2 треугольник
Weight: 0.5	Weight: 1.078

<p>Вкладка Variations: julian: 0.822</p> <p>Вкладка Vatiables: julia_power: 5 julian_dist: 0.863</p>	<p>Вкладка Variations: flatten: 1 juliascope: 1.997</p> <p>Вкладка Vatiables: julia_power: -2 julian_dist: 1</p> <p>Вкладка Triangle: X: (1.23599;-0.333629) Y: (1.90521;-0.385093) O: (1.59633;-0.024749)</p>
3 треугольник	4 треугольник
<p>Weight: 2.584</p> <p>Вкладка Variations: julian: 1.213</p> <p>Вкладка Vatiables: julia_power: -2 julian_dist: 1</p> <p>Вкладка Triangle: X: (1.43146;-0.014561) Y: (0.446127;0.999894) O: (1.431566;-0)</p>	<p>Weight: 1.661</p> <p>Вкладка Variations: linear: 0.752</p> <p>Вкладка Triangle: X: (1.43146;-0.014561) Y: (0.446127;0.999894) O: (1.431566;-0)</p>
5 треугольник	6 треугольник
<p>Weight: 2.149</p> <p>Вкладка Variations: bubble: 0.669 pre_blur: 5 wedge: 0.029</p> <p>Вкладка Vatiables: wedge_angle: 2.6028 wedge_hole: 1.958 wedge_count: 10 wedge_swirl: 0.13</p>	<p>Weight: 2.149</p> <p>Вкладка Variations: bubble: 0.441 pre_blur: 5 wedge: 0.029</p> <p>Вкладка Vatiables: wedge_angle: 2.6028 wedge_hole: 1.958 wedge_count: 6 wedge_swirl: 0.13</p>
7 треугольник	8 треугольник
<p>Weight: 2.149</p> <p>Вкладка Variations:</p>	<p>Weight: 0.5</p> <p>Вкладка Variations:</p>

bubble: 0.265 pre_blur: 5 wedge: 0.029 Вкладка Vatiables: wedge_angle: 1.7858 wedge_hole: 1.045 wedge_count: 3 wedge_swirl: -0.284	bubble: 0.141
9 треугольник	10 треугольник
Weight: 1.661 Вкладка Variations: linear: 0.752 Вкладка Triangle: X: (-1.29269;1.28731) Y: (-0.186739;0.845803) O: (-0.518963;1.61953)	Weight: 0.5 Вкладка Variations: noise: 0.131 Вкладка Triangle: X: (-1.11573;2.67584) Y: (-2.8444;4.40451) O: (-2.8444;2.67584)

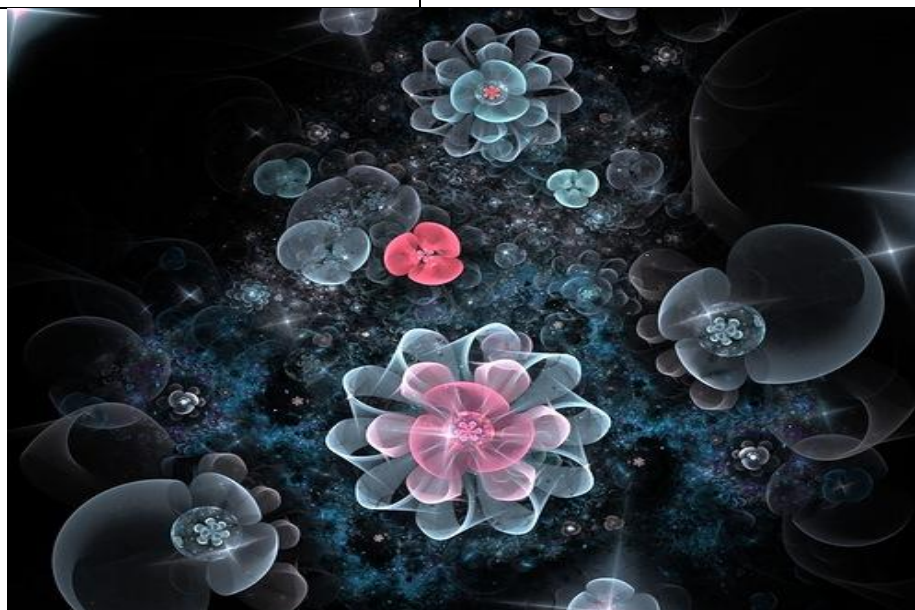


Рисунок 4 – Фрактал «Зимний букет»

Все остальные атрибуты на вкладках всех треугольников оставляем без изменений. В завершении нужно выбрать цвет фрактала, размер, формат и отрендерить проект.

Занятие 7. Построение «Карстовая пещера» в программе ApophysisX7.

Цель: Познакомить учащихся с особенностями, методами и приемами построения фракталов в программе ApophysisX7.

Примерное содержание:

Для начала необходимо открыть окно Adjustments и выставить атрибут Pitch: 52. Это необходимо для разворачивая фрактала относительно оси OZ. В редакторе треугольников нужно везде учитывать Linear3D: 0.

В редакторе треугольников создаем треугольники и задаем соответствующие атрибуты.

1 треугольник	2 треугольник
Weight: 1.997 Вкладка Variations: bubble: 0.309 pre_blur: 1 hexes: 0.078 Вкладка Variables: hexes_cellsize: 0.381 hexes_power: 1 hexes_rotate: 0.166 hexes_scale: 0.874 Вкладка Triangle: X: (1.02164;-0.389998) Y: (0.389998;1.02164) O: (0;0)	Weight: 0.5 Вкладка Variations: zscale: 0.541 ztranslate: -0.028 zcone: -0.041 juliascope: 1 Вкладка Variables: juliascope_power: 2 juliascope_dist: 1 Вкладка Triangle: X: (-0.81981;-0.554848) Y: (0.56699;-0.831952) O: (0.012142;0)
3 треугольник	4 треугольник
Weight: 2.8 Вкладка Variations: zscale: 0.541 ztranslate: -0.028 zcone: -0.041 juliascope: 1 Вкладка Variables: juliascope_power: -2 juliascope_dist: 1	Вкладка Variations: noise: 0.133 zscale: 0.484 ztranslate: 0.841 zcone: -0.077

Вкладка Triangle: X: (-1.33936;-0.272247) Y: (0.291255;-0.59807) O: (-0.361142;0.38015)	
--	--

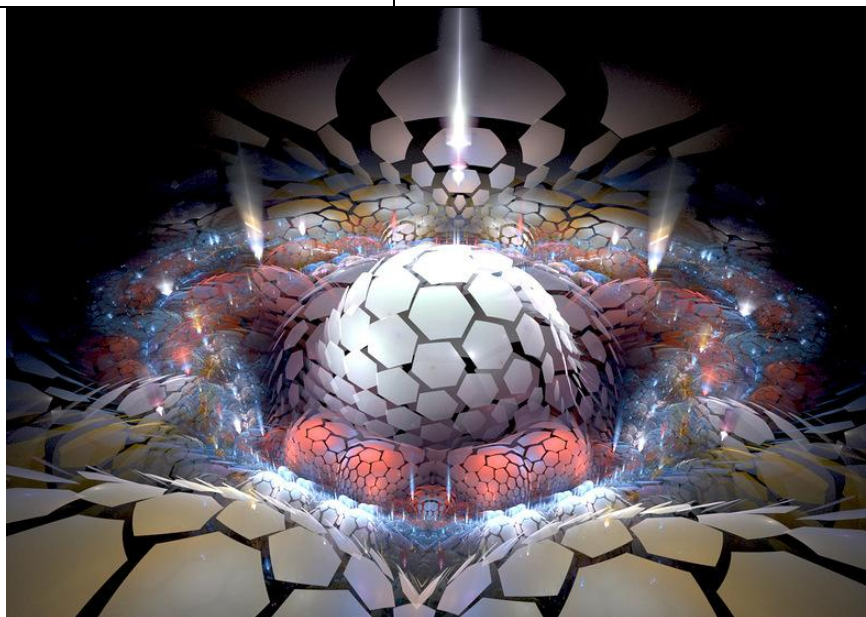


Рисунок 5 – Фрактал «Карстовая пещера»

Все остальные атрибуты на вкладках всех треугольников оставляем без изменений. В завершении нужно выбрать цвет фрактала, размер, формат и отрендерить проект.

Занятие 8. Итоговое занятие. Творческая работа.

Цель: Контроль усвоения учащимися приобретенных знаний, расширение и закрепление знаний по изученному материалу.

Учащимся дается 2 часа на построение собственного фрактального изображения. Учащиеся должны сами разработать алгоритм построения фрактального изображения, задать точки в пространстве, атрибуты простейших элементов, градиент, получить после рендеринга изображение.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ермаков, Д.С. Создание элективных учебных курсов для профильного обучения / Д.С. Ермаков, Г.Д. Петрова // Школьные технологии. – 2003. - № 6. – С. 22-29.
2. Митенева, С. Ф. Теоретические аспекты проблемы развития творческих способностей обучающихся / С. Ф. Митенева // Среднее профессиональное образование. - 2010. - № 7. - С. 29-30.
3. Соколов, И. С. Элементы фрактальной геометрии в обучении математике в средней школе / И. С. Соколов [науч. рук. С.Ф. Митенева] // Молодые исследователи – регионам: Материалы Международной научной конференции. В 3-х томах. Ответственный редактор А.А. Сеницын. – Вологда: ВоГУ, 2018. - С. 134-135.
4. Федяева, Л. В. Элективные курсы в системе математического образования / Л. В. Федяева // Математика и информатика: наука и образование: Межвузовский сборник научных трудов. Ежегодник. – Омск: Изд-во ОмГПУ, 2007. – Вып. 6. – С. 139–141.
5. Черникова, Т.В. Методические рекомендации по разработке и оформлению программ элективных курсов / Т.В. Черникова // Профильная школа. – 2005. - №5. – С.11-16.
6. Алгоритм Скотта Дрейвса <https://habr.com/ru/post/251537/>