Игонина Татьяна Романовна,

доцент кафедры ВМ-2,

Российского технологического университета,

Параскевопуло Ольга Ригасовна,

доцент кафедры ВМ-2,

Российского технологического университета,

Пронина Елена Владиславовна,

доцент кафедры ВМ-2,

Российского технологического университета,

Москва, Россия

МЕТОДЫ ОБУЧЕНИЯ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКИХ ВУЗОВ ИНТЕГРИРОВАНИЮ НЕКОТОРЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

Аннотация. В статье приведена методика изложения темы «Интегрирование рациональных дробей, содержащих в знаменателе многочлен, имеющий отрицательный дискриминант». Рассмотрены конкретные примеры и даны рекомендации по использованию данной методики на семинарских занятиях и в процессе самостоятельной работы студента. Показано преимущество излагаемого метода подачи материала.

Ключевые слова: преподавание математики; интеграл; интегральное исчисление; рациональная дробь; отрицательный дискриминант; замена переменных

Процесс обучения интегрированию является одним из самых важных моментов обучения в техническом вузе, так как на умении интегрировать базируется дальнейшее изучение математических, физических и технических дисциплин.

При интегрировании рациональных дробей у студентов наибольшие трудности вызывают дроби, в знаменателе которых содержится многочлен, имеющий отрицательный дискриминант. Рассмотрим два способа, облегчающие понимание и реализацию идеи интегрирования наиболее часто встречающихся интегралов

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+2px+q}dx\text{, при условии } p^2-q<0 \text{ или } q-p^2>0\text{, назовем его первым интегралом,}$$

$$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{x^2+2px+q}}dx\text{, при условии } p^2-q<0 \text{ или } q-p^2>0\text{, назовем вторым интегралом.}$$

Идея интегрирования состоит в том, что исходный интеграл путём алгебраических преобразований числителя приводится к сумме двух интегралов, которые берутся достаточно легко.

Для первого интеграла имеем

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+2px+q}dx = A\cdot\int\frac{d(x^2+2px+q)}{x^2+2px+q} + B\cdot\int\frac{d(x+p)}{(x+p)^2+(q-p^2\,)} =$$

$$= A\cdot ln|x^2+2px+q| + \frac{B}{\sqrt{q-\ p^2}}\cdot arctq\left(\frac{x+p}{\sqrt{q-\ p^2}}\right)+C.$$

Для второго интеграла имеем

$$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{x^2+2px+q}}dx = A\cdot\int\frac{d(x^2+2px+q)}{\sqrt{x^2+2px+q}} + B\cdot\int\frac{d(x+p)}{\sqrt{(x+p)^2+(q-\ p^2\,)}} =$$

$$= A\cdot 2\cdot\sqrt{x^2+2px+q} + B\cdot ln\left|x+p+\sqrt{x^2+2px+q}\right|+C.$$

Стандартный способ подбора коэффициентов *A* и *B* представленный в [1], вызывает некоторые трудности у студентов. Нами предлагаются два способа, позволяющие упростить нахождение этих коэффициентов:

<u>Первый способ</u> – это подбор коэффициентов по определенному алгоритму, не требующему «изобретательности» от студентов и облегчающий усвоение материала;

Второй способ – это замена в интеграле, приводящая к распаду интеграла на два берущихся интеграла.

Для наглядности рассмотрим следующие примеры интегрирования первого и второго интегралов:

перый интеграл $- \int \frac{3x+5}{x^2+6x+13} dx$

$$\text{второй интеграл } - \int \frac{3x+5}{\sqrt{x^2+6x+13}} dx$$

Первый способ нахождение коэффициентов происходит по заданному алгоритму. Приведем этот алгоритм.

Для первого и второго интегралов суть алгоритма состоит в следующем:

1 шаг – приравнять числитель исходной дроби к производной знаменателя, умноженной на неизвестный коэффициент *A*

2 шаг – прибавить неизвестный коэффициент *B*.

Тем самым исходный интеграл, распадается на два интеграла, которые легко приводятся к табличным. Методом неопределенных коэффициентов находим неизвестные A и B.

$Mx + N = A \cdot (x^2 + 2px + q)' + B$ или

$Mx + N = A \cdot (2x + 2p) + B \ \Rightarrow \begin{cases} M = 2 \cdot A \\ N = A \cdot 2p + B \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} A = \dfrac{M}{2} \\ B = N - A \cdot 2p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = M/2 \\ B = N - M \cdot p \end{cases}$

Рассмотрим наши примеры $\int \frac{3x+5}{x^2+6x+13} dx$ и $\int \frac{3x+5}{\sqrt{x^2+6x+13}} dx$:

$3x + 5 = A \cdot (x^2 + 6x + 13)' + B$ или $3x + 5 = A \cdot (2x + 6) + B$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях *x*, найдем $A = \frac{3}{2}$ и $B = -4$, и можем брать интегралы:

для первого интеграла имеем

$$\int \frac{3x+5}{x^2+6x+13} dx = \frac{3}{2} \cdot \int \frac{d(x^2+6x+13)}{x^2+6x+13} - 4 \cdot \int \frac{d(x+3)}{(x^2+6x+9)+4} =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \ln|x^2 + 6x + 13| + \frac{4}{2} \cdot \mathrm{arctq}\left(\frac{x+3}{2}\right) + C,$$

для второго интеграла имеем

$$\int \frac{(3x+5)dx}{\sqrt{x^2+6x+13}} = = \frac{3}{2}\int \frac{d(x^2+6x+13)}{\sqrt{x^2+6x+13}} - 4\int \frac{d(x+3)}{\sqrt{(x+3)^2+4}} =$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{x^2+6x+13} + \frac{4}{2}\ln\left|x+3+\sqrt{(x+3)^2+4}\right| + C$$

Второй способ решения – это способ вычисления интеграла с помощью замены, которая получается, если в знаменателе подынтегральной функции выделить полный квадрат. Замена приводит к распаду интеграла на два берущихся интеграла, константы при которых совпадают с коэффициентами при интегрировании первым способом. Исходные интегралы примут вид

первый интеграл

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+2px+q}dx = \begin{vmatrix} t = x+p \\ x = t-p \\ dt = dx \end{vmatrix} = \int \frac{M(t-p)+N}{(t-p)^2+2p(t-p)+q}dt =$$

$$= \int \frac{Mt \cdot dt}{t^2+(q-p^2)} + \int \frac{N-Mp}{t^2+(q-p^2)}dt =$$

$$= \frac{M}{2} \cdot \int \frac{2tdt}{t^2+(q-p^2)} + (N-Mp) \cdot \int \frac{dt}{t^2+(q-p^2)} =$$

$$= \frac{M}{2} \cdot ln|t^2+(q-p^2)| + \frac{(N-Mp)}{\sqrt{q-p^2}} \cdot arctq\left(\frac{t}{\sqrt{q-p^2}}\right) + C =$$

$$= \frac{M}{2} \cdot ln|x^2+2px+q| + \frac{(N-Mp)}{\sqrt{q-p^2}} \cdot arctq\left(\frac{x+p}{\sqrt{q-p^2}}\right) + C$$

второй интеграл

$$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{x^2+2px+q}}dx = \begin{vmatrix} t = x+p \\ x = t-p \\ dt = dx \end{vmatrix} = \int \frac{M(t-p)+N}{\sqrt{(t-p)^2+2p(t-p)+q}}dt =$$

$$= \int \frac{Mt \cdot dt}{\sqrt{t^2+(q-p^2)}} + \int \frac{N-Mp}{\sqrt{t^2+(q-p^2)}}dt =$$

$$= \frac{M}{2} \cdot \int \frac{2tdt}{\sqrt{t^2+(q-p^2)}} + (N-Mp) \cdot \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+(q-p^2)}} =$$

$$= M \cdot \sqrt{t^2+(q-p^2)} + (N-Mp) \cdot ln\left|t+\sqrt{t^2+(q-p^2)}\right| + C =$$

$$= M \cdot \sqrt{x^2+2px+q} + (N - Mp) \cdot ln\left|x + p + \sqrt{x^2+2px+q}\right| + C$$

Вернемся к примеру:

Выделяем в знаменателе дроби полный квадрат $x^2 + 6x + 13 = (x+3)^2 + 4$.

Очевидно, что за новую переменную необходимо взять $t = x + 3$, откуда $x = t - 3$ и $dx = dt$.

Для первого интеграла:

$$\int \frac{3x+5}{x^2+6x+13}dx = \int \frac{3(t-3)+5}{t^2+4}dt = \int \frac{3t-4}{t^2+4}dt = 3\int \frac{t}{t^2+4}dt - 4\int \frac{dt}{t^2+4} =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot ln|t^2+4| - \frac{4}{2} arctq\frac{t}{2} + C = \frac{3}{2} \cdot ln|x^2+6x+13| + \frac{4}{2} \cdot arctq\frac{x+3}{2} + C.$$

Для второго интеграла:

$$\int \frac{3x+5}{\sqrt{x^2+6x+13}}dx = \int \frac{3(t-3)+5}{\sqrt{t^2+4}}dt = \int \frac{3t-4}{\sqrt{t^2+4}}dt = 3\int \frac{t}{\sqrt{t^2+4}}dt - 4\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+4}} =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot 2\sqrt{t^2+4} - \frac{4}{2} \cdot ln\left|t + \sqrt{t^2+4}\right| + C =$$

$$= 3 \cdot \sqrt{x^2+6x+13} - \frac{4}{2} \cdot ln\left|x + 3 + \sqrt{x^2+6x+13}\right| + +C$$

Приведенные способы преобразования интегралов студенты осваивают быстрее и легче. Для упорядочения данного материала ниже представлена таблица, которая помогает свести все методы вместе.

Таблица 1. интегрирование рациональных дробей, знаменатель которых содержит многочлен, имеющий отрицательный дискриминант

Вид интеграла (исходный)	$\int \frac{Mx+N}{x^2+2px+q}dx$	$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{x^2+2px+q}}dx$
первый способ: подбор коэффициентов A и B по определенному алгоритму	$Mx + N = A \cdot (x^2+2px+q)' + B$ $A = M/2$ $B = N - M \cdot p$	

Сумма интегралов, к которым сводится исходный	$A\cdot\int\frac{d(x^2+2px+q)}{x^2+2px+q}+$ $+B\cdot\int\frac{d(x+p)}{(x+p)^2+(q-p^2)}$	$A\cdot\int\frac{d(x^2+2px+q)}{\sqrt{x^2+2px+q}}+$ $+B\cdot\int\frac{d(x+p)}{\sqrt{(x+p)^2+(q-p^2)}}$
Окончательный результат	$A\cdot ln\lvert x^2+2px+q\rvert+$ $+\frac{B}{\sqrt{q-p^2}}$ $\cdot arctq\left(\frac{x+p}{\sqrt{q-p^2}}\right)+C$	$A\cdot 2\cdot\sqrt{x^2+2px+q}+$ $+B\cdot ln\left\lvert x+p+\sqrt{x^2+2px+q}\right\rvert$ $+C$
второй способ: использование замены	$t=x+p$ $x=t-p$ $dt=dx$	
Сумма интегралов, к которым сводится исходный	$\frac{M}{2}\cdot\int\frac{2tdt}{t^2+(q-p^2)}+$ $+(N-Mp)\cdot\int\frac{dt}{t^2+(q-p^2)}$	$\frac{M}{2}\cdot\int\frac{2tdt}{\sqrt{t^2+(q-p^2)}}+$ $+(N-Mp)\cdot\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+(q-p^2)}}$
Окончательный результат	$\frac{M}{2}\cdot ln\lvert x^2+2px+q\rvert+$ $+\frac{(N-Mp)}{\sqrt{q-p^2}}$ $\cdot arctq\left(\frac{x+p}{\sqrt{q-p^2}}\right)+C$	$\frac{M}{2}\cdot\sqrt{x^2+2px+q}+\mathrm{C}+$ $+(N-Mp)ln\left\lvert x+p\right.$ $\left.+\sqrt{x^2+2px+q}\right\rvert$

Все три способа, включая «стандартный», равнозначны, но можно сказать, что только первый способ отражает суть процесса интегрирования и понимания того, что в результате интегрирования мы получаем:

1. Для первого интеграла сумму функций логарифма и арктангенса с точностью до константы,

2. Для второго интеграла сумму функций корня и логарифма с точностью до константы.

Третий способ предполагает больше «механического» запоминания, чем смыслового, и позволяет не задумываясь получить сумму берущихся интегралов.

Многообразие способов, используемых в процессе обучения, позволяет повысить эффективность овладения приемами конкретных техник интегрирования, что значительно способствует повышению уровня математической культуры учащихся.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И., Шикин Е.В., Заляпин В.И., Соболев С.К. Вся высшая математика. Интегральное исчисление, дифференциальное исчисление функций нескольких переменных, дифференциальная геометрия. – Т. 2. – М.: Эдиториал УРСС, 2000.

2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. 1 часть. – 2-е издание испр. – М.: Айрис-пресс, 2004. – 288 с.

3. Ефимов А.В., Каракулин А.Ф., Коган С.М., Поспелов А.С., Шостак Р.Я. Сборник задач по математике для втузов. Часть 2. – 4-е изд. перераб. и доп. – М.: Издательство Физико-математической литературы, 2003. – 432 с.

4. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т.2. – М.: Наука, 1968.