

ИННОВАЦИИ В НАУКЕ: ПУТИ РАЗВИТИЯ

Якушева Альбина Константиновна,

учитель математики;

Селезнева Светлана Сергеевна,

выпускница 2017-2018 учебного года МБОУ «Лицей №17»

г. Березовский, Кемеровская область

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ №16 ИЗ ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ ПРОФИЛЬНОГО УРОВНЯ

Аннотация. В статье рассматривается вариант решения задачи №16 из типового экзаменационного сборника «ЕГЭ. Математика. Профильный уровень» (2017-2018).

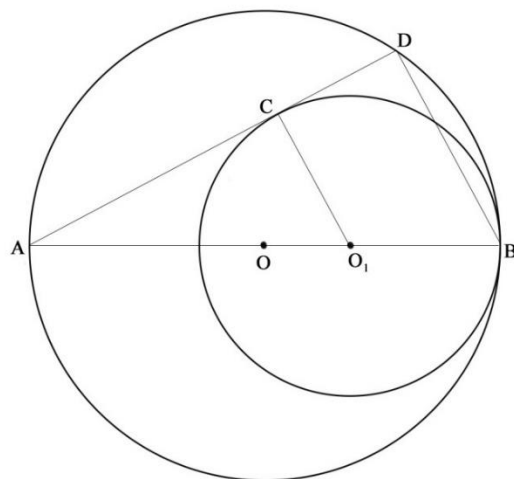
Ключевые слова: математика, ЕГЭ, профильный уровень, решение задачи.

Вариант №3, задача №16. Условие:

На диаметре AB окружности с центром O взята точка O_1 . С центром в точке O_1 построена вторая окружность. Луч с началом в точке A касается второй окружности в точке C и пересекает первую окружность в точке D .

а) Докажите, что прямая O_1C параллельна BD .

б) Прямая O_1C пересекает окружность с диаметром AB в точках P и Q , причём точка P лежит на дуге ADB . Найдите площадь четырёхугольника $PDBQ$, если окружности касаются внутренним образом в точке B , $AB = 25$, а радиус второй окружности равен 8.



ИННОВАЦИИ В НАУКЕ: ПУТИ РАЗВИТИЯ

а) Рассмотрим угол ADB . Он опирается на диаметр AB , следовательно, угол ADB равен 90 градусов. O_1C - это радиус окружности с центром O_1 , проведенный к касательной AD . Значит, угол ACO_1 равен 90 градусов. Отрезок CD перпендикулярен отрезкам CO_1 и BD , следовательно, эти прямые параллельны, и т.д.

б) 1. Рассмотрим прямоугольный треугольник ACO_1 . Отрезок CO_1 равен 8 , так как является радиусом окружности с центром в точке O_1 . Отрезок AO_1 равен диаметр AB минус радиус BO_1 .

$$AO_1 = 25 - 8 = 17$$

По теореме Пифагора найдём катет AC . Катет AC равен разности квадрата гипотенузы AO_1 и квадрата катета CO_1 .

$$AC = \sqrt{(289 - 64)} = \sqrt{225} = 15$$

2. Рассмотрим треугольник ADB и треугольник ACO_1 . Угол A - общий; угол C равен углу D и равен 90 градусов. Значит, треугольник ADB подобен треугольнику ACO_1 по двум углам.

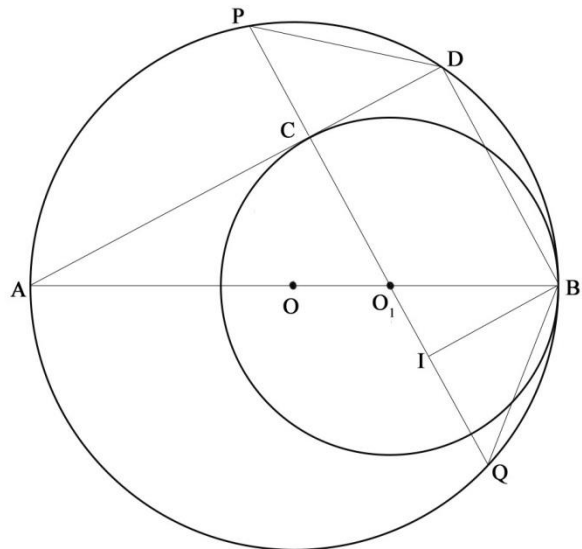
Составим пропорцию отношения сторон треугольников.

$$\frac{AD}{AC} = \frac{DB}{CO_1} = \frac{AB}{AO_1}$$

Так как диаметр AB равен 25 , а отрезок AO_1 равен 17 , то стороны треугольника ADB относятся к сторонам треугольника ACO_1 как $\frac{25}{17}$.

Так как отрезок AC равен 15 , то AD так относится к 15 , как 25 к 17 .

$$\frac{AD}{15} = \frac{25}{17}$$



ИННОВАЦИИ В НАУКЕ: ПУТИ РАЗВИТИЯ

$$AD = \frac{375}{16}$$

Так как отрезок CO_1 равен 8, то DB так относится к 8, как 25 к 17.

$$\frac{DB}{8} = \frac{25}{17}$$

$$DB = \frac{200}{17}$$

Так как отрезок AD равен $\frac{375}{16}$, а отрезок AC равен 15, то высота трапеции $PDBQ$ равна разности AD и AC .

$$CD = \frac{375}{16} - 15 = \frac{120}{17}$$

3. Рассмотрим треугольники ACO_1 и BO_1I . Отрезок BI – высота в трапеции, O_1C – радиус малой окружности, проведённый в точку касания. Значит, угол BO_1I равен углу ACO_1 и равен 90 градусам. Углы CO_1A и BO_1I равны как вертикальные. Отсюда следует, что треугольники ACO_1 и BO_1I подобны.

Составим пропорцию:

$$\frac{AO_1}{BO_1} = \frac{CO_1}{IO_1}$$

$$\frac{17}{8} = \frac{8}{IO_1}$$

$$IO_1 = \frac{64}{17}$$

4. $PC=IQ=x$ (так как $PDBQ$ – равнобедренная трапеция). $AC \cdot CD = PC \cdot CQ$ (по свойству хорд).

$$CQ = CO_1 + IO_1 + IQ = 8 + \frac{64}{17} + x$$

Составим уравнение.

$$15 * \frac{120}{17} = x * \left(8 + \frac{64}{17} + x\right)$$

$$\frac{15 \cdot 120}{17} = x \cdot \left(\frac{200}{17} + x\right)$$

ИННОВАЦИИ В НАУКЕ: ПУТИ РАЗВИТИЯ

$$\frac{1800}{17} = \frac{200 \cdot x}{17} + x^2$$

$$x^2 + \frac{200}{17} \cdot x - \frac{1800}{17} = 0$$

$$17 \cdot x^2 + 200 \cdot x - 1800 = 0$$

$$D = 40000 + 122400 = 162400 = 25 \cdot 16 \cdot 406$$

$$x = \frac{-200 + 20\sqrt{406}}{34} = \frac{10\sqrt{406} - 100}{17}$$

$$PQ = CI + PC + IQ = \frac{200}{17} + 2 * \left(\frac{10\sqrt{406} - 100}{17} \right)$$

5. Найдём площадь трапеции PDBQ

$$S_{PDBQ} = \left(\frac{DB + PQ}{2} \right) * DC$$

$$S_{PDBQ} = \left(\frac{\frac{200}{17} + \frac{200}{17} + 2 * \left(\frac{10\sqrt{406} - 100}{17} \right)}{2} \right) * \frac{120}{17}$$

$$S_{PDBQ} = \frac{12000 + 1200\sqrt{406}}{289}$$

$$\text{Ответ: } S_{PDBQ} = \frac{12000 + 1200\sqrt{406}}{289}$$