Мичурина Кристина Александровна,
студентка 2 курса физико-математического факультета,
ННГУ им. Н.И. Лобачевского,
г. Арзамас

ОСНОВНЫЕ ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ЗАДАНИЙ ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

Аннотация. В статье рассматриваются различные способы и рекомендации по решению задач из ЕГЭ повышенного уровня (ч.2 №19)

Ключевые слова: ЕГЭ, математика, профильный уровень, часть 2, ВУЗ, способы решения, методы, диофантово уравнение, метод осознанного перебора.

В настоящее время каждый ученик выпускного класса твердо знает: без ЕГЭ с хорошим баллом нет никаких шансов поступить в вуз и получить достойное образование. Согласно требованиям законодательства, каждый выпускник школы должен сдать ЕГЭ по окончании обучения, если он собирается учиться дальше [1]. Экзамены проводятся в один и тот же день по всей стране, с учетом часовых поясов и переводятся в 100 бальную шкалу, на основе которой каждый ВУЗ устраивает конкурс. Выпускник, не сдавший ЕГЭ или набравший недостаточно баллов, не будет допущен к нему.

Рассмотрим подробнее структуру ЕГЭ по математике профильного уровня, по результатам которого и устраивается конкурс в ВУЗе. Тест ЕГЭ по математике профильного уровня состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий.

Часть 1: 8 заданий (1–8) базового уровня сложности с кратким ответом.

Часть 2: 4 задания (9–12) повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий (13–19) повышенного и высокого уровней сложности с развернутым ответом [1]. Каждое задание оценивается разным количеством первичных баллов [2].

1-12	1
13-15	2
16-17	3
18-19	4

Каждый выпускник хочет набрать как можно больше баллов по математике, потому что данный предмет входит в список обязательных. По разговорам родителей выясняется, что математика входит в перечень нелёгких предметов. Да, это действительно так. Но как же набрать желаемый балл и пойти навстречу своей мечте?

В этой статье мы рассмотрим наиболее лёгкие и доступные методы решения задания под номером 19. Задание 19 относится к заданиям высокого уровня сложности. В 2017 году особенно важно отметить высокую успешность выполнения этого задания, проверяющего умение строить и исследовать математические модели, выпускниками сельских школ (20% выпускников). Это показывает, что в сельских школах особенно заметем прогресс в развитии общематематических навыков, логической культуры [3]. Задание 19 позволяет выпускникам сельских школ продемонстрировать свои навыки и быть конкурентными при поступлении в ВУЗы. Процент получения ненулевых баллов при выполнении этой задачи выше, чем у многих других заданий с кратким ответом. Успешность выполнения заданий с развернутым ответом свидетельствует о том, что более четверти участников экзамена владеют на хорошем уровне программой по математике за курс основной и старшей школы и могут письменно оформить результаты своих рассуждений. Это самая последняя и самая сложная задача в профильном ЕГЭ по математике, которая вполне претендует на олимпиадный уровень [5]. Обычно такие задачи содержат в себе сразу несколько вопросов. В целом задача 19 сводится к составлению и дальнейшему решению уравнения в целых числах (оно же —

диофантово уравнение). Но, прежде чем приступать к решению таких уравнений, вам потребуется небольшая теоретическая подготовка и своего рода «разминка для мозгов». Для решения заданий данного типа следует повторить разделы комбинаторики, прогрессии, элементы статистики, теорию делимости, множества.

Давайте подробно разберём одну из задач на множества и решим её несколькими способами.

Пусть множество называется *хорошим*, если существует возможность разбить это множество на подмножества, суммы элементов в которых одинаковы.

а) является ли хорошим множество $\{200; 201; 202; \dots ; 299\}$?

б) является ли хорошим множество $\{2; 4; 8; ,,, ; 2^{100}\}$?

в) каково число хороших четырёхэлементных подмножеств у множества $\{1; 2; 4; 5; 7; 9; 11\}$ [4, с. 27-29]?

Не нужно пугаться термина «хорошее» множество. Это обыденно для составителей вариантов ЕГЭ по математике. Когда не хватает слов, приходится использовать слова не по их прямому назначению.

Способ 1. Перейдём к решению. Отвечаем на вопрос под буквой А. Является записанное множество хорошим? Предположим, что да. Если это действительно так, то это самый простой случай для нас. Ведь в этом случае требуется лишь привести пример разбиения этого множества на два множества, суммы элементов которых одинаковы. В противном случае пришлось бы доказывать принципиальную невозможность нужного разбиения. А это уже гораздо сложнее. Ну а поскольку это лишь задание под буквой А, можно надеяться, что оно достаточно простое. Итак, попытаемся разбить наше множество на два подмножества, суммы элементов в которых будут одинаковы.

К счастью, чтобы это сделать, не нужно быть вундеркиндом. Берём самое очевидное и интуитивное решение. Группируем элементы исходного множества в пары: первый с последним, второй с предпоследним и так далее:

$\{200; 299\}$, $\{201; 298\}$, $\{202; 297\}$, ..., $\{249; 250\}$.

Последняя парочка будет состоять из двух чисел: 249 и 250. Всего таких парочек получится 50. Сумма чисел в каждой парочке равна 499. А дальше берите какие угодно 25 парочек в первое множество, остальные 25 — во второе множество, и получите требуемое разбиение. Итак, ответ на вопрос под буквой А — да! Переходим к вопросу под буквой Б. Задание то же самое, только множество другое. Поэтому думается, что авторы-составители должны были здесь проявить оригинальность. Так что, скорее всего, это множество уже не будет хорошим. Если это так, то просто примером в данном случае ограничиться не получится, придётся всё доказывать. Ну что ж, попробуем.

Вообще говоря, если вдуматься в задание, то решение приходит, само собой. Нам требуется разбить данное множество на два подмножества, суммы элементов в каждом из которых равны. Ну и, в общем, чтобы понять, что ключ к решению в том, чтобы найти, чему должны быть равны эти суммы! А для этого нужно посчитать сумму элементов нашего исходного множества.

Посмотрите внимательно. Перед нами классическая геометрическая прогрессия со знаменателем $q = 2$, первым членом $b_1 = 2$ и $n = 100$элементами. Сумма всех элементов такой прогрессии определяется по известной формуле:

$S = \frac{b_1\left(q^n - 1\right)}{q - 1} = \frac{2\left(2^{100} - 1\right)}{2 - 1} = 2\left(2^{100} - 1\right).$

Это означает, что если бы мы разбили наше множество на два подмножества с одинаковой суммой элементов в каждом из них, то эта сумма оказалась бы равной $2^{100} - 1$. А это нечётное число! Но ведь все элементы нашего множества — это степени двойки, то есть числа безусловно чётные. Вопрос. Может ли получиться нечётное число, если складывать чётные числа? Конечно, нет. То есть мы доказали невозможность такого разбиения. Итак, ответ к вопросу под буквой Б из решения задачи 19 из ЕГЭ по математике (профильный уровень) — нет!

Ну и наконец, переходим к вопросу под буквой В. Сколько же четырёхэлементных хороших множества содержится в множестве {1; 2; 4; 5; 7; 9; 11}? Да… Тут уже придётся задуматься более серьёзно. Так как же его решить?

Доводилось ли вам когда-нибудь слышать об осознанном переборе? Этот метод применяется тогда, когда возможных вариант не очень много. Но при этом варианты перебираются не как попало, а в определённой последовательности. Это нужно для того, чтобы не упустить из виду ни одного возможного варианта. Плюс, по возможности, при переборе исключаются из рассмотрения невозможные варианты. Итак, как же нам свести это задание к осознанному перебору?

Введём фильтр, ограничивающий перебор:

- Заметим сразу, что суммы искомых хороших четырёхэлементных подмножеств должны быть чётными, иначе их нельзя разбить на подмножества с одинаковыми суммами элементами. При этом минимально возможная сумма равна 1+2+4+5 = 12, а максимально возможная сумма равна 5+7+9+11 = 32. Таких сумм 11 штук.

- Примем также во внимание, что чётные числа 2 и 4 должны либо одновременно входить в хорошее четырёхэлементное множество, либо одновременно не входить в него. В противном случае только одно из чисел четырёхэлементного множества чётное, поэтому сумма элементов такого множества не будет чётной.

- Поскольку порядок расположения элементов в искомых хороших четырёхэлементных множествах не важен, договоримся, что элементы в этих множествах будут у нас расположены по возрастанию.

Рассматриваем все возможные суммы:

1. Сумма 12: {1; 2; 4; 5}.
2. Сумма 14: {1; 2; 4; 7}.
3. Сумма 16: нет вариантов.
4. Сумма 18: {2; 4; 5; 7}.
5. Сумма 20: нет вариантов.
6. Сумма 22: {2; 4; 7; 9}, {2; 4; 5; 11}.
7. Сумма 24: {1; 5; 7; 11}.
8. Сумма 26: {2; 4; 9; 11}.
9. Сумма 28: нет вариантов.
10. Сумма 30: нет вариантов.
11. Сумма 32: {5; 7; 9; 11}.

Вот и получилось у нас всего 8 множеств. Других вариантов нет. То есть ответ к заданию под буквой В — 8.

Способ 2. а) Разобьём множество {200, 201, 202, ..., 299} на два множества пятидесяти элементных множества следующим образом: {200, 299, 202, 297, 204, 295, ..., 248, 251}, {201; 298; 203; 296; 205, 294, ..., 249, 250}.

Сумма чисел в этих двух подмножествах одинакова, поэтому исходное множество является хорошим. (Возможны и другие примеры.)

б) Заметим, сумма чисел в подмножестве, которое будет содержать число будет больше суммы чисел в другом подмножестве, поскольку больше суммы всех остальных чисел: $1+2+4+\ldots+2^{98}+2^{99}=2^{100}-1<2^{100}$

Следовательно, множество {2; 4; 8; ...; 2^{100}} не является хорошим.

в) Заметим, что четырёхэлементное множество является хорошим в двух случаях: либо одно число является суммой трёх других, либо множество содержит две пары чисел с равными суммами.

Подмножества множества {1; 2; 4; 5; 7; 9; 11}, удовлетворяющие первому случаю, — это {1; 2; 4; 7} и {2; 4; 5; 11}.

Рассмотрим второй случай и заметим, что если множество содержит две пары чисел с равными суммами, то сумма всех чисел чётна. Следовательно, четные числа 2 и 4 либо одновременно входят в хорошее четырёхэлементное подмножество, либо одновременно не входят в него.

Если 2 и 4 входят в подмножество, то либо сумма двух других чисел равна 6, это подмножество $\{1; 2; 4; 5\}$, либо разность двух других чисел равна 2, это подмножества: $\{1; 2; 4; 5\}$; $\{2; 4; 5; 7\}$; $\{2; 4; 7; 9\}$; $\{2; 4; 9; 11\}$.

Если 2 и 4 не входят в подмножество, то хорошее подмножество лежит во множестве $\{1; 5; 7; 9; 11\}$. Получаем хорошие подмножества: $\{1; 5; 7; 11\}$ и $\{5; 7; 9; 11\}$. Всего найдено 8 хороших подмножеств. Других вариантов нет.

Ответ: а) да; б) нет; в) 8

Глубина и серьезность подготовки абитуриента к сдаче ЕГЭ зависят от цели, которую он перед собой ставит. Как-нибудь сдать математику и забыть про нее навсегда? Получить оценку, о которой не стыдно будет сказать родным и друзьям? Блестяще сдать математику? – Согласитесь, подготовка к каждому из данных вариантов сдачи экзамена требует особого подхода. Старайтесь рассматривать разные формы одного и того же задания (могут просто поменять числа, знаки, без изменения структуры, и это многих уже вводит в заблуждение). Последние несколько заданий требуют хороших, глубоких знаний по математике, часто они неотличимы от олимпиадных задач. Сделайте себе план подготовки к ЕГЭ. Поверьте, год – достаточно для того, чтобы сдать экзамен хорошо!

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Образовательный портал: http://www.mnogo-otvetov.ru

2. Образовательный портал: http://www.examen.ru

3. Образовательный портал ФИПИ, 2017

4. ЕГЭ: Математика. 1000 задач с ответами и решениями. Все задания части 2 / И. Н. Сергеев, В. С. Панферов. – М.: Издательство «Экзамен», 2017.

5. *Развитие клипового мышления у студентов в системе высшего образования посредством опорных граф - схем. Нестерова Л.Ю., Напалков С.В. // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Социальные науки. – 2016. – № 4 (44). – С. 207-215.*