УДК 330.4

Краснов Алексей Александрович,
магистрант 2 курса факультета прикладной математики,
физики и информационных технологий;
Юсупов Ильдус Юнусович,
доцент кафедры актуарной и финансовой математики,
кандидат физико-математических наук,
ФГБОУ ВО «Чувашский Государственный университет
им. И.Н. Ульянова»

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ КОНЕЧНОЙ ЕМКОСТИ

Аннотация. В статье показана возможность применения обыкновенных дифференциальных уравнений для моделирования инвестиционных процессов конечной емкости с участием одного или нескольких инвесторов. Приведены аналитическое и численное решения предложенных систем дифференциальных уравнений. Рассмотрены примеры, построены искомые траектории инвестиционных процессов.

Ключевые слова: инвестиции, накопление, дифференциальное уравнение, численная схема.

Исследование различных экономических процессов, в том числе построение математических моделей инвестиционных накоплений, можно проводить на основе дифференциальных уравнений [1]. Инвестиционные процессы носят, как правило, нелинейный характер. При наличии устойчивой закономерности малые величины можно заменить дифференциалами, тем самым получив обыкновенные дифференциальные уравнения.

Актуальность инвестиций как важного инструмента современной экономики подтверждает важность построения точных математических моделей расчета накоплений инвесторов.

Простейшая функция накопления является решением дифференциального уравнения

$$y'_t = \delta y, \quad y(t_0) = c, \; (1)$$

где δ - интенсивность накопления процентов.

Более широкий класс функций накопления был рассмотрен в [2]. Также в [3] был описан пример инвестиционного процесса с участием двух инвесторов.

Ниже рассматривается инвестиционный процесс с участием произвольного количества инвесторов с различными первоначальными капиталами и конечной емкостью инвестиционного процесса.

Постановка задачи. Пусть в инвестиционном процессе конечной емкости Δ и интенсивностью начисления процентов δ участвуют N инвесторов с различными первоначальными капиталами c_i и имеется влияние накопления участвующих сторон друг на друга. Тогда система дифференциальных уравнений, определяющих функции накопления, будет иметь вид

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = \delta \cdot y_1 \cdot \left(1 - \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{N} y_i}{\Delta} \right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_N}{dt} = \delta \cdot y_N \cdot \left(1 - \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{N} y_i}{\Delta} \right) \end{cases} \quad (2)$$

с начальными условиями

$y_1(t_0) = c_1, \ldots, y_N(t_0) = c_N$. (3)

Решением системы (2)-(3) будут функции

$$y_i = \frac{\Delta \cdot c_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} c_i + \left(\Delta - \sum\limits_{i=1}^{N} c_i \right) e^{-\delta(t - t_0)}}, \quad i = \overline{1, N}. \ (4)$$

Общая емкость инвестиционного процесса Δ, индивидуальная емкость для каждого инвестора составит

$$\lim_{t \to \infty} y_i = \lim_{t \to \infty} \frac{\Delta \cdot c_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} c_i + \left(\Delta - \sum\limits_{i=1}^{N} c_i \right) e^{-\delta(t - t_0)}} = \frac{\Delta \cdot c_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} c_i}. \ (5)$$

Графики накоплений трех инвесторов с первоначальными капиталами 100, 200, 300, интенсивностью накоплений $\delta = 0.2$, общей емкостью 2000 представлены на рисунке 1.

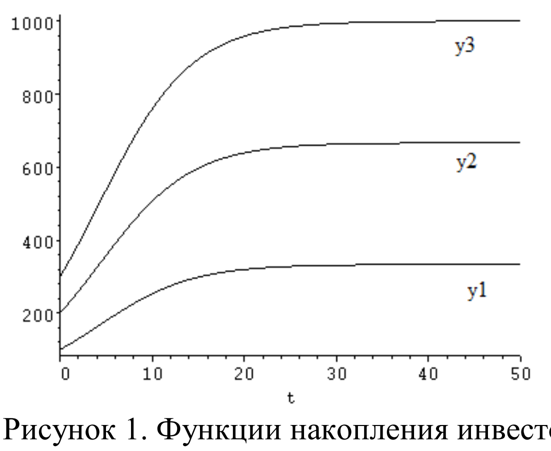

Рисунок 1. Функции накопления инвесторов
(одинаковая интенсивность накопления)

Для анализа накоплений инвесторов при разных интенсивностях начисления процентов необходимо решить задачу Коши для системы

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = \delta_1 \cdot y_1 \cdot \left(1 - \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{N} y_i}{\Delta}\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_N}{dt} = \delta_N \cdot y_N \cdot \left(1 - \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{N} y_i}{\Delta}\right) \end{cases} \qquad (6)$$

с начальными условиями (3).

Решение данной системы аналитически затруднительно, поэтому для случая трех инвесторов численная схема метода Эйлера примет вид

$$\begin{cases} y_1^{i+1} = y_1^i + h \cdot \delta_1 \cdot y_1^i \cdot \left(1 - (y_1^i + y_2^i + y_3^i)/\Delta\right), \\ y_2^{i+1} = y_2^i + h \cdot \delta_2 \cdot y_2^i \cdot \left(1 - (y_1^i + y_2^i + y_3^i)/\Delta\right), \\ y_3^{i+1} = y_3^i + h \cdot \delta_3 \cdot y_3^i \cdot \left(1 - (y_1^i + y_2^i + y_3^i)/\Delta\right), \end{cases} \qquad (7)$$

$$y_1^0 = c_1,\ y_2^0 = c_2,\ y_3^0 = c_3,$$

где $t_0 < t_0 + h < t_0 + 2h < \ldots$ - равномерная сетка по времени, h - длина шага или временного интервала. На рисунках 2 (а, б) изображены графики накоплений всех трех инвесторов, построенные при значениях первоначальных капиталов 100, 200, 300, общей емкостью 2000.

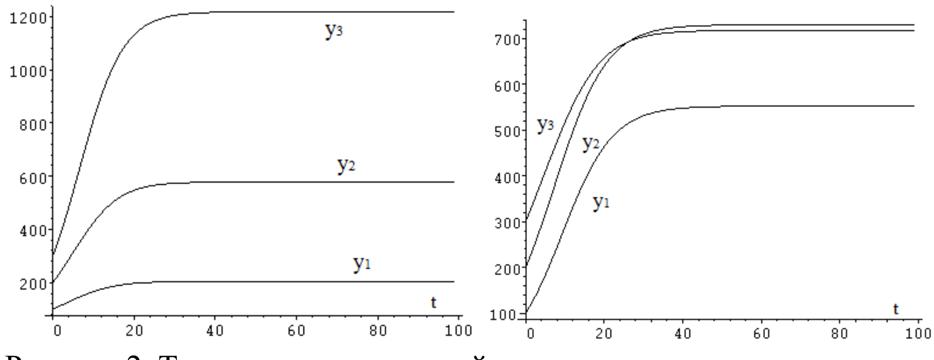

Рисунок 2. Траектории накоплений инвесторов

а) $\delta_1 = 0.1, \delta_2 = 0.15, \delta_3 = 0.2$ б) $\delta_1 = 0.2, \delta_2 = 0.15, \delta_3 = 0.1$

В работе особое внимание уделено построению и исследованию систем дифференциальных уравнений инвестиционных процессов аналитическим и численным методом Эйлера. Вопросы существования и единственности решений рассмотренных дифференциальных уравнений оставлены без рассмотрения, положившись на теорию, предложенную в [2]. Авторы ограничились демонстрационными примерами, расчеты проводились в среде Maple.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Афанасьева Д.В., Бальбекова Е.А., Иваницкий А.Ю. Вероятностные модели рынка ценных бумаг: учебное пособие. – Чебоксары: Изд-во Чувашского университета, 2007. – 92 с.

2. Алексеев Б.В., Афанасьева Д.В., Иваницкий А.Ю. Дискретные и непрерывные потоки платежей для функции накопления, определенной аксиомами // Численный анализ: теория, приложения, программы. Изд-во МГУ. – 1999. – С. 154-159.

3. Егорова Д.В. Функция накопления, определяемая по конечному множеству кривых // Математическое моделирование в естественных и гуманитарных науках. Воронеж. – 2003. – С. 45.