

ИДЕИ И ПРОЕКТЫ МОЛОДЕЖИ РОССИИ

РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ СТЕРЖНЯ В УСЛОВИЯХ ЗАВИСИМОСТИ ПАРАМЕТРОВ ТЕПЛОЕМКОСТИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

Холева Елизавета Эрюардовна,
2 курс, ФГБОУ ВО «Воронежский государственный
университет инженерных технологий», г. Воронеж
Руководитель **Пятаков Ю.В.,** к.ф.-м.н.

Ключевые слова: теплопроводность; теплоемкость; температурное поле стержня; математическая модель.

Введение

Целью предлагаемой работы является решение задачи расчета температурного поля стержня с теплоизолированной боковой поверхностью, коэффициент теплоемкости которого зависит от температуры.

Постановка задачи

Математическая модель задачи представляет собой систему уравнений теплового баланса вида:

$$C_o(T(x,t)) \cdot \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \lambda \cdot \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \quad x \in (0, L), \quad t \in [0, t_k] \quad (1)$$

с заданными: начальным

$$T(x,0) = T_0(x) \quad (2)$$

и граничными условиями

$$T(0,t) = T_1(t), \quad T(L,t) = T_2(t) \quad (3)$$

В системе уравнений (1)-(3) $T(x,0) = T_0(x)$ - значение температуры стержня в точке x в момент времени t ; λ - коэффициент теплопроводности (имеет постоянное значение); L - длина стержня; t_k - конечное значение времени; $C_o(T(x,t))$ - коэффициент объемной теплоемкости, зависимость которого от температуры $T(x,t)$ имеет вид:

$$C_o(T(x,t)) = C + a \cdot T(x,t) \quad (4)$$

Решение задачи

Подставив выражение для объемной теплоемкости (4) в уравнение (1), получим

$$[C + a \cdot T(x,t)] \cdot \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \lambda \cdot \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \quad (5)$$

Преобразуем левую часть соотношения (5), внося сомножитель $[C + a \cdot T(x,t)]$ под знак производной. Тогда уравнение (5) примет вид:

$$\frac{\partial [C \cdot T(x,t) + a/2 \cdot T(x,t)^2]}{\partial t} = \lambda \cdot \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2},$$

или, что-то же самое

ИДЕИ И ПРОЕКТЫ МОЛОДЕЖИ РОССИИ

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} = \lambda \cdot \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \quad (6)$$

где

$$S(x,t) = C \cdot T(x,t) + \frac{a}{2} \cdot T^2(x,t). \quad (7)$$

Заметим, что, если нам известно значение температуры $T(x,t)$ в точке x в момент времени t , то на основании соотношения (7) можно получить значение функции $S(x,t)$.

С другой стороны, если нам известно значение функции $S(x,t)$ в точке x в момент времени t , то решая уравнение (7) относительно функции $T(x,t)$, мы можем получить выражение для определения температуры.

Действительно, перепишем уравнение (7) в виде

$$a \cdot T(x,t)^2 + 2 \cdot C \cdot T(x,t) - 2 \cdot S(x,t) = 0. \quad (8)$$

Тогда, учитывая, что $T(x,t) \geq 0$

$$T(x,t) = \sqrt{\left(\frac{C}{a}\right)^2 + 2 \frac{S(x,t)}{a}} - 2 \cdot \frac{C}{a} = \frac{2 \cdot S(x,t)}{\sqrt{C^2 + 2a \cdot S(x,t)} + C}.$$

Таким образом, исходное уравнение теплопроводности (1) можно заменить эквивалентным уравнением

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} = \lambda \cdot \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \quad (9)$$

в котором функции $T(x,t)$ и $S(x,t)$ связаны соотношениями

$$S(x,t) = C \cdot T(x,t) + \frac{a}{2} \cdot T^2(x,t),$$

$$T(x,t) = 2 \cdot \frac{S(x,t)}{\sqrt{C^2 + 2a \cdot S(x,t)} + C}.$$

В качестве метода решения дифференциального уравнения (9) при условиях (2), (3) будем использовать явную разностную схему.

Результаты расчета модельного примера

В примере осуществлялся расчет температурного поля теплоизолированного стержня толщины $L=2,5$ см, теплофизические параметры которого соответствуют параметрам резиновой смеси, используемой для изготовления беговой части протекторов автомобильных шин [1]:

- коэффициент теплопроводности $\lambda = 0,197$ Вт/(м·град);
- плотность $\rho = 1401,4$ кг/м³

Зависимость теплоемкости от температуры имеет вид:

$$c_p = 0,8336 \cdot (T + 273,15) + 898,495 \text{ Дж/(кг·град)}. \quad (11)$$

Начальное значение температуры $T_0 = 20$ °С,

Значения температуры на концах стержня $T_1(t) = T_2(t) = 195$ °С

ИДЕИ И ПРОЕКТЫ МОЛОДЕЖИ РОССИИ

На рисунке 1 приведены графики изменения температуры в середине стержня.

График 1 представляет собой значение температуры, рассчитанной с учетом изменения теплоемкости в соответствии с формулой (11), графики 2 и 3 не учитывают изменение теплоемкости в стержне (при расчете графика 2 значение теплоемкости бралось постоянным, рассчитанным по формуле (11) при минимальном значении температуры $T=20$ °С; при расчете графика 3 значение теплоемкости рассчитывалось по формуле (11) при максимальном значении температуры $T=195$ °С

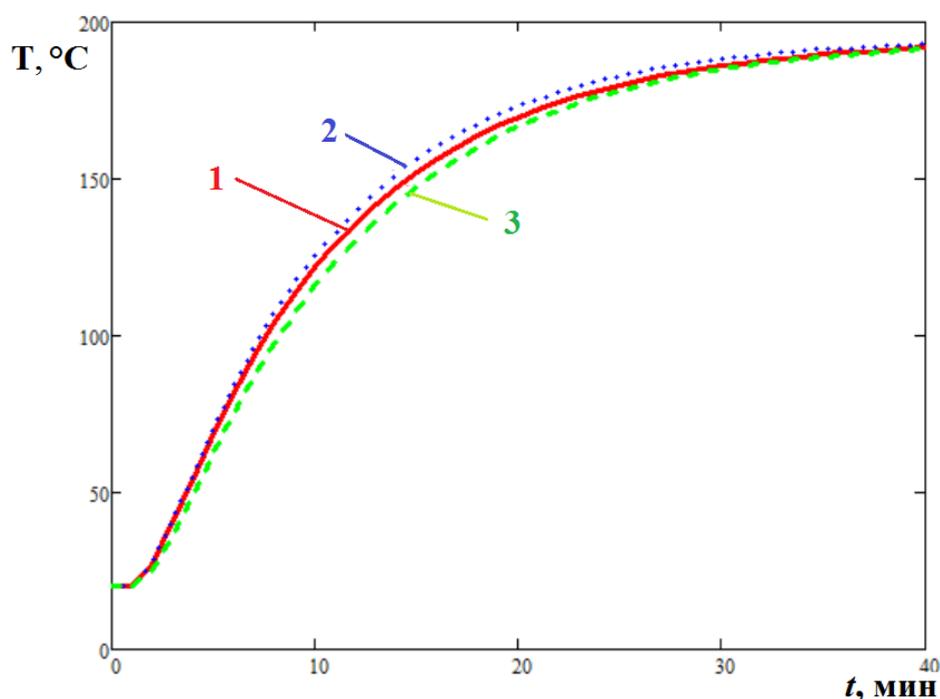


Рис. 1. **Графики температуры**

Как показывают сопоставления рассчитанных значений температур, не учет изменения коэффициента теплоемкости может привести к погрешности определения температуры от $-4,2$ °С до $+6,5$ °С.

Выводы

Известно, что изменение температуры на 10 ° изменяет значение скорости процесса вулканизации в два раза. Таким образом, не учет зависимости теплофизических параметров среды от температуры может привести к существенным погрешностям в определении оптимальной продолжительности процесса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихомиров С.Г. Численный алгоритм расчета температурных полей пневматических шин в процессе вулканизации [Текст] / С.Г. Тихомиров, Ю.В. Пятаков, О.В. Карманова, В.И. Молчанов // Вестник ВГУИТ. – 2015. – №2. – С. 158-154