УДК 372.851

Огурцова Ольга Константиновна,

канд. пед. наук, доцент,

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского,

г. Нижний Новгород, Россия

ЭВРИСТИЧЕСКИЕ ПРИЁМЫ В РЕШЕНИЯХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ БАРИЦЕНТРИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Аннотация. Выделены общие и частные эвристические приёмы, используемые при решении геометрических задач барицентрическим методом, показаны примеры их применения.

Ключевые слова: материальная точка, барицентр, барицентрический метод, эвристический приём (эвристика).

«Бари» в переводе с древнегреческого означает «тяжесть», т.е. понятие барицентра связано с физическим понятием центра тяжести. Несколько простых свойств барицентра – понятия, которое имеет чисто физические истоки, - позволяют решать различные задачи алгебры и геометрии. В частности, таким путём удаётся ответить на вопросы о том, пересекаются ли несколько прямых в одной точке, принадлежат ли несколько точек одной прямой, найти отношение длин отрезков и т.п. Таким образом, барицентрический метод позволяет показать возможность применения физических понятий для решения задач математики.

Остановимся на применении понятия барицентра к решению геометрических задач. Сущность барицентрического метода состоит в в том, что внимание концентрируется на определённых точках – барицентрах каких-то систем материальных точек, связанных с рассматриваемой геометрической задачей. Необходимо выяснить, откуда возникает целесообразность рассмотрения именно этих точек.

Известны следующие основные свойства барицентра:

1) Положение барицентра материальных точек не зависит от порядка их объединения.
2) Положение барицентра материальных точек не изменится, если заменить несколько материальных точек их барицентрами.

Эти положения позволяют указывать различные порядки объединения материальных точек, что затем применяется для нахождения барицентра рассматриваемой при решении задачи системы материальных точек, как точки пересечения некоторых отрезков. Использование этих свойств также помогает формулировать новые задачи, приэтом подчёркивая, что барицентрический метод хорошо применяется именно для решения геометрических задач определённых типов. Таким образом, указанные основные свойства барицентра являются одними из общих эвристических приёмов (эвристик), действующих при решении геометрических задач барицентрическим методом.

Следует рассмотреть ещё две общие эвристики:

1) Зная массы точек, можно найти отношение длин отрезков.
2) Зная отношение длин отрезков, можно найти массы точек.

Они всегда используются при решении задачи барицентрическим методом, играя определяющую роль при выборе системы материальных точек, т.к. нахождение барицентра связано с нахождением отношений длин отрезков, которые и определяются массами точек, и, наоборот, по заданному положению барицентра, т.е. по заданным отношениям длин отрезков, можно найти массы точек.

К частным эвристикам, наиболее часто применяемым при решении геометрических задач барицентрическим методом, можно отнести следующие:

1) Барицентр двух материальных точек с равными массами находится в середине отрезка, их соединяющего.

2) Прямая, проведённая через барицентр трёх материальных точек, расположенных в вершинах треугольника, и одну из его вершин, пересекает противоположную сторону в точке расположения барицентра материальных точек, помещённых в оставшиеся вершины.
3) Барицентр трёх материальных точек, расположенных в вершинах треугольника, является точкой пересечения прямых, каждая из которых проходит через соответствующую вершину треугольника и барицентр материальных точек, помещённых в оставшиеся вершины.
4) Всегда возможно поместить такие три массы в вершины треугольника, чтобы барицентр образующихся таким образом трёх материальных точек был расположен в фиксированной точке внутри треугольника.

Новые частные эвристики появляются как результаты решения задач. Например, на основе того факта, что барицентр трёх материальных точек, расположенных в вершинах треугольника и имеющих равные массы, совпадает с точкой пересечения медиан этого треугольника, легко с помощью барицентрического метода обосновывается свойство медиан треугольника пересекаться в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.

Проиллюстрируем применение указанных свойств (эвристик), связанных с барицентрическим методом, при решении конкретных геометрических задач.

Задача 1: Докажите, что в тетраэдре отрезки, соединяющие вершину тетраэдра с точкой пересечения медиан противоположной грани, пересекаются в одной точке, которая делит каждый такой отрезок в отношении 3:1, считая от вершины.

В ходе поиска доказательства следует обратиться к аналогичной ситуации, связанной с точкой пересечения медиан треугольника, и сделать вывод о необходимости рассмотрения системы четырёх материальных точек, расположенных в вершинах тетраэдра и имеющих равные массы. Далее исследуются различные последовательности объединения введённых материальных точек, замены несколько материальных точек их барицентрами при нахождении барицентра всей рассматриваемой системы материальных точек. Это позволяет доказать пересечение указанных отрезков в одной точке – общем барицентре, и найти отношение длин отрезков, как отношение масс соответствующих материальных точек.

Задача 2: Докажите, что средние линии любого четырёхугольника и отрезок, соединяющий середины его диагоналей, проходят через одну точку и делятся ею пополам.

В ходе поиска доказательства следует вспомнить, что барицентр двух материальных точек с равными массами находится в середине отрезка, их соединяющего. В итоге, возникает необходимость рассмотрения системы четырёх материальных точек, расположенных в вершинах четырёхугольника и имеющих равные массы. Далее рассуждения аналогичны тем, что в задаче 1.

Задача 3: Докажите, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

Поиск доказательства следует начать с очевидного факта, что две биссектрисы треугольника точно пересекаются в некоторой точке. Остаётся доказать, что третья биссектриса также проходит через эту точку. Возникает необходимость поместить такие три массы в вершины треугольника, чтобы барицентр образующейся системы материальных точек был расположен в фиксированной точке внутри треугольника. Подбор масс определяется отношением длин отрезков и тем фактом, что барицентр трёх материальных точек, расположенных в вершинах треугольника, является точкой пересечения прямых, каждая из которых проходит через соответствующую вершину треугольника и барицентр материальных точек, помещённых в оставшиеся вершины. В итоге, используя свойство биссектрисы треугольника делить противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам, для вершин берутся массы, равные длинам противоположных сторон.

Другие примеры решения геометрических задач барицентрическим методом можно также изучить в источниках [1, 2].

Список литературы

1. Балк М.Б., Болтянский В.Г. Геометрия масс. – М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит. 1987. – 160 с.

2. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии. Ч. 2. – М.: Наука, гл. ред. физ-мат. лит., 1991. – 240 с.: ил.