УДК 51

Михайлюк Ольга Демьяновна,

преподаватель,

Филиал Воронежского государственного технического университета в городе Борисоглебске, г. Борисоглебск, Россия

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ КРУГ – ПОНЯТЬ ИЛИ ЗАУЧИТЬ

Аннотация. *В статье предложен фрагмент урока по объяснению способа получения числовых значений sin, cos, tg, ctg. Автором предложен альтернативный способ их запоминания.*

Ключевые слова. *Тригонометрия, синус, косинус, тангенс, котангенс, радианная мера, градусная мера, числовые значения, тригонометрическая окружность, единичная окружность.*

Тригонометрия ассоциируется с понятиями – синус, косинус, тангенс, котангенс. В данном примере для расчетов возьмем за основу единичную окружность радиусом в 1см. Через центр данной окружности проведем оси координат и определим их как: горизонтальная ось X – числовые значения *cos*; вертикальная ось Y – числовые значения *sin.*

Следовательно, значения косинуса и синуса принимают на промежутке от [-1;1] в числовом выражении, или в радианном выражении от [0;2π], или в градусной мере от [0º;360º]. На окружности расположены точки, определяющие при соединении их с центром угловые значения, выраженные в градусной или радианной мере, а на осях получаем числовые значения данных углов. Помимо этого данные оси делят окружность на четыре четверти. Отметим все вышеперечисленное на рисунке 1.

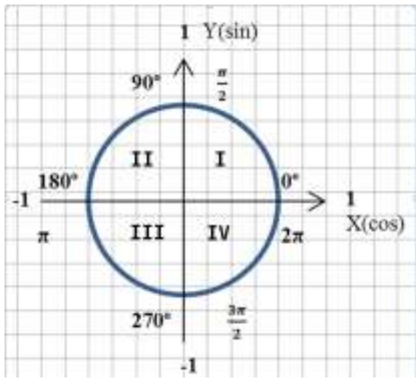

Рисунок 1. Единичная окружность

Одним из показателей, способствующим быстрому решению тригонометрических уравнений и неравенств является знание числовых значений углов. Есть несколько способов их применять: самый простой – всегда иметь при себе таблицу часто встречающихся значений; второй способ посложнее – выучить эти значения (раньше именно так и делали); последний способ – воспользоваться тригонометрической окружностью.

В некоторых учебниках данная окружность встречается уже готовой (рисунок 2) и без объяснения появления точек и числовых значений. Давайте разберемся, как же появляются данные значения, а так же выведем закономерности, позволяющие быстрее их запоминать.

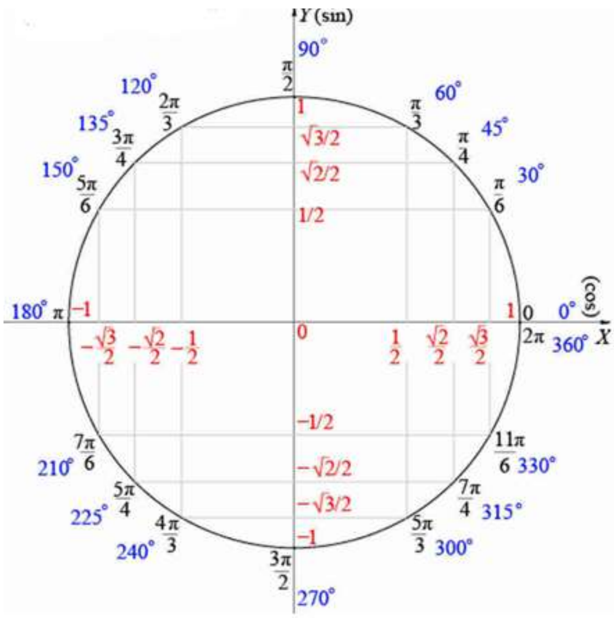

Рисунок 2. Тригонометрический круг

Начертим первую единичную окружность и разделим каждую четверть пополам, то есть разделим всю окружность на 8 частей. Получившийся чертеж представлен на рисунке 3а. При делении первой четверти пополам получаем точку в 45º или $\frac{\pi}{4}$, далее каждый раз смешаемся на 45º ($\frac{\pi}{4}$) против часовой стрелки, расставляя значения в градусной и радианной мере. Заметим, что точки, расположенные на осях останутся неизменными. Например, следующая точка после поворота будет 45º+45º=90º или $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$. Остальные точки вычисляются аналогично.

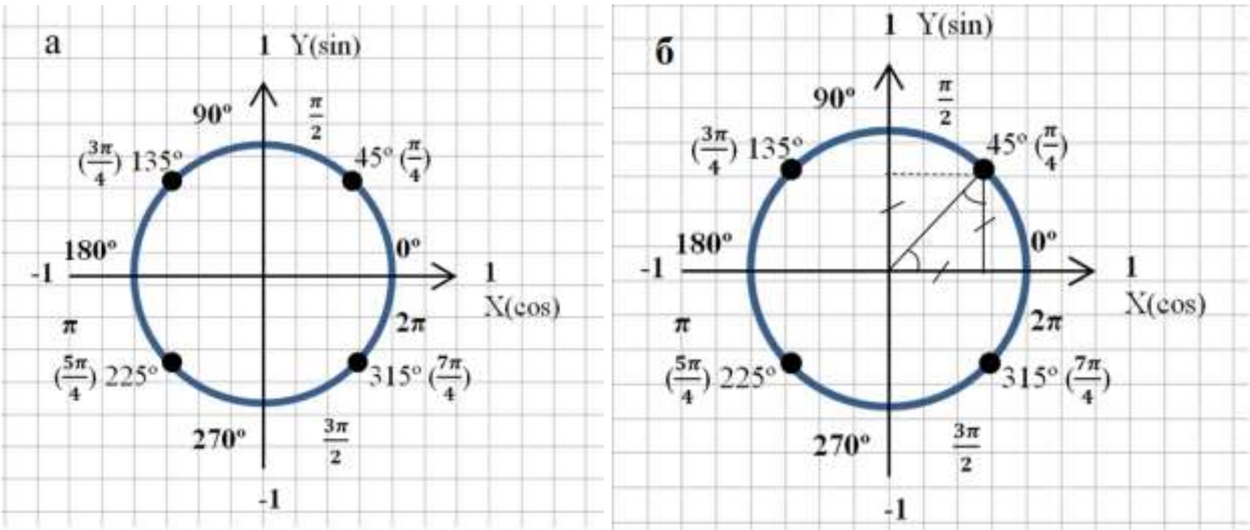

Рисунок 3. Числовая окружность, деленная на 8 частей

а – окружность разделена на 8 частей; б – из точки в 45º проведен луч в центр

Теперь найдем числовое значение полученных точек. Для нахождения числового значения точки 45º ($\frac{\pi}{4}$) необходимо соединить ее с центром окружности, опустить из нее параллельно оси Y прямую до пересечения с осью X. Получившаяся фигура это равнобедренный прямоугольный треугольник (рисунок 3б). Радиус является гипотенузой и равен единице, отрезки на осях это катеты равные между собой, то есть x=y (обозначим их z). По теореме Пифагора $a^2+b^2=c^2$, (где a, b – катеты, c – гипотенуза) получим:

$$z^2+z^2=1^2 \rightarrow \quad 2z^2=1 \rightarrow z^2=\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad z=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \ \textit{или} \ z=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(\textit{после умножения на } \sqrt{2})$$

В учебной литературе можно встретить оба варианта записи. Теперь разберемся со знаком – он определяется согласно четверти для каждой из осей отдельно, то есть находим одну из соответствующих точек, выбираем функцию и смотрим ее знак в данной четверти. Например, косинус положительный в первой и четвертой четверти, а синус в первой и второй четвертях.

Далее вспомним, чему равны значения тангенса и котангенса: $tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$, $ctgx = \frac{\cos x}{\sin x}$. Так как sin и cos равны, то tg и ctg в данных точках равны ±1 (знак определяется исподя из начальных значений).

Теперь разделим изначальную окружность на 12 частей, укажем значения получившихся точек в градусной и радианной мере (рисунок 4а).

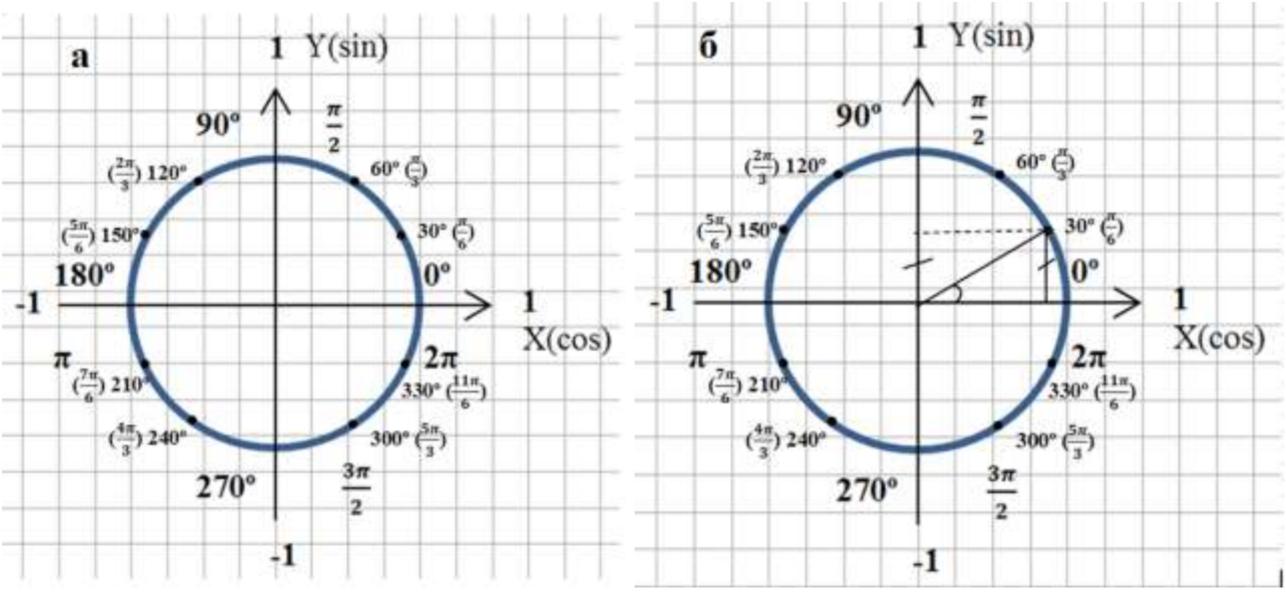

Рисунок 4. Числовая окружность, деленная на 12 частей

а – окружность разделена на 12 частей; б – из точки в 30º проведен луч в центр

Рассчитаем аналогично предыдущему методу числовые значения sin и cos. Для начала соединим точку в 30º ($\frac{\pi}{6}$) с центром окружности и опустим из нее параллельно оси Y прямую до пересечения с осью X. Получившаяся фигура это прямоугольный треугольник (рисунок 4б). Радиус является гипотенузой и равен единице, отрезки на осях это катеты, причем, угол, прилегающий к оси X, равен 30º (а как мы помним – катет, лежащий против угла в 30º равен половине гипотенузы), то есть sin равен $\frac{1}{2}$. По теореме Пифагора вычислим значение cos:

$$x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2 \quad \rightarrow \quad x^2 = 1 - \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad x^2 = \frac{3}{4} \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} \quad \rightarrow \quad x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

При вычислении следующей точки в 60º ($\frac{\pi}{3}$) синус и косинус поменяются на противоположные значения (угол в 30º будет прилегать к прямой проведенной параллельно оси X). Кстати, если наложить рисунок 3а и рисунок 4а друг на друга, то получим рисунок 2.

Исходя, из всего вышесказанного, можно увидеть следующую закономерность:

- если радианная мера имеет в знаменатели цифру «6» ($\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ и т.д.), то значение $\sin x = \pm\frac{1}{2}$, а $\cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$;

- если радианная мера имеет в знаменатели цифру «3» ($\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ и т.д.), то значение $\sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, а $\cos x = \pm\frac{1}{2}$.

Знак определяется согласно четверти. Но если в первом случаи запомнить числовые значения tg и ctg не составило труда, то здесь уже сложнее значения могут быть равны или $\pm\sqrt{3}$, или $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3} \textit{после умножения на } \sqrt{3}\right)$.

Здесь для запоминания можно немножко схитрить, если вспомнить основное тригонометрическое тождество: $tgx \cdot ctgx = 1 \Rightarrow tgx = \frac{1}{ctgx} \textit{ или } ctgx = \frac{1}{tgx}$. То есть запомнить, например, в каких случаях тангенс и котангенс принимают, к примеру, значение $\pm\sqrt{3}$. Тангенс принимает данное значение в точках $\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ и т.д., а котангенс в точках $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ и т.д., следовательно, значение $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ функции принимают в противоположных точках.

Конечно способов, правил и методов запоминания значений можно составить великое множество. Данный метод является одним из них, но исходя из опыта преподавания данной темы, лучше всего значения запоминаются в «паре» с постоянной практикой.

Список литературы

1. Малкова А.Г. Математика / Анна Малкова. – Изд. 2-е. – Ростов н/Д : Феникс, 2021. – 474, [1] с.: ил. – (ЕГЭ. Секретные приемы репетитора).

ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

2. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10–11 классы. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) / А.Г. Мордкович. – 14-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2013. – 400 с. : ил.